

“COMPUTABILITÀ”
LAUREA SPECIALISTICA IN INFORMATICA
UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI CATANIA
ANNO ACCADEMICO 2005/06

II appello sessione anticipata - 9 Marzo 2006

Svolgere i seguenti esercizi, argomentando adeguatamente le risposte.

I PARTE

ESERCIZIO 1

Si dimostri che esistono due funzioni totali e non calcolabili $f, g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ tali che la loro somma $f(x) + g(x)$ risulta calcolabile.

ESERCIZIO 2

Sia $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ la funzione definita da:

$$f(x) = \begin{cases} \phi_x(x) + 1 & \text{se } \phi_x(x) \downarrow \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Dopo aver dimostrato che la funzione f non è calcolabile, si stabilisca se la seguente funzione $g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ definita da

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } x \in \{0, 1\} \\ g(x-1) + 2g(x-2) & \text{se } x \geq 2 \end{cases}$$

è

- (a) totale,
- (b) calcolabile,
- (c) primitiva ricorsiva.

ESERCIZIO 3

Sia $f(x_1, \dots, x_n, y)$ una funzione totale calcolabile. Si dimostri che anche la funzione $\mu z < y (f(x_1, \dots, x_n, z) = 0)$ è totale calcolabile.

II PARTE

ESERCIZIO 4

Si enunci il teorema s - m - n e lo si applichi per dimostrare che esiste una funzione totale calcolabile $s(x)$ tale che

$$\begin{aligned} W_{s(x)} &= \{x + n^2 : n \in \mathbb{N}\} \\ E_{s(x)} &= \{nx : n \in \mathbb{N}\}. \end{aligned}$$

ESERCIZIO 5

Si studi la decidibilità e la parziale decidibilità del predicato unario

$$P(x) =_{Def} "W_x \subseteq E_x"$$

e della sua negazione $\neg P(x)$.