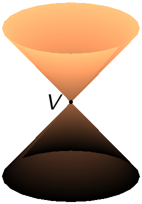
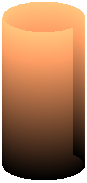
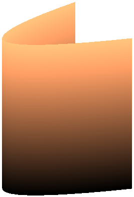
Coni e cilindri



Cono di vertice V



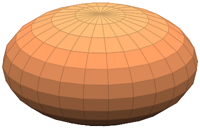
Cilindro ellittico



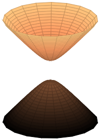
Cilindro parabolico

Cilindro iperbolico

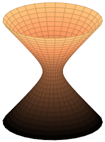
Quadriche non degeneri



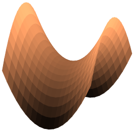
Ellissoide



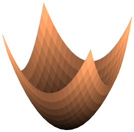
Iperboloide ellittico



Iperboloide iperbolico



Paraboloide iperbolico



Paraboloide ellittico

Fissiamo nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}, u$.

Definizione

Una quadriche è il luogo dei punti, propri o impropri, reali o immaginari, che con le loro coordinate omogenee (x', y', z', t') soddisfano un'equazione di secondo grado omogenea nelle variabili x', y', z', t':

$$\begin{aligned} a_{11}{x'}^2 + 2a_{12}x'y' + 2a_{13}x'z' + a_{22}{y'}^2 + 2a_{23}y'z' + \\ + a_{33}{z'}^2 + 2a_{14}x't' + 2a_{24}y't' + 2a_{34}z't' + a_{44}{t'}^2 = 0. \end{aligned}$$

Per considerare i punti propri della quadrica teniamo conto del fatto che $x = \frac{x'}{t'}$, $y = \frac{y'}{t'}$ e $z = \frac{z'}{t'}$. Allora, dividendo per ${t'}^2$:

$$\begin{aligned} a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + a_{22}y^2 + 2a_{23}yz + \\ + a_{33}z^2 + 2a_{14}x + 2a_{24}y + 2a_{34}z + a_{44} = 0. \end{aligned}$$

Questa è l'equazione della quadrica in forma non omogenea.

Ad ogni quadrica associamo le matrici simmetriche:

$$B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & a_{34} \\ a_{14} & a_{24} & a_{34} & a_{44} \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

Se poniamo:

$$\underline{x'} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ t' \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \underline{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix},$$

allora l'equazione della quadrica può essere scritta in forma compatta. La forma omogenea può essere scritta in questo modo:

$${}^{t}\underline{x}' B \underline{x}' = 0,$$

mentre quella non omogenea in quest'altro:

$${}^{t}\underline{x} B \underline{x} = 0.$$

Fare esercizio 3.1 dal libro di esercizi.

Definizione

Se il polinomio

$$a_{11}{x'}^2 + 2a_{12}x'y' + 2a_{13}x'z' + a_{22}{y'}^2 + 2a_{23}y'z' + \\ + a_{33}{z'}^2 + 2a_{14}x't' + 2a_{24}y't' + 2a_{34}z't' + a_{44}{t'}^2 = 0$$

si spezza nel prodotto di due fattori lineari, distinti o meno, la quadrica si dice riducibile o spezzata ed i suoi punti sono quelli dei due piani di cui è unione. Se una quadrica non è riducibile, si dice che è irriducibile.

- L'intersezione di una quadrica Q con una retta r è costituita da due punti (propri o impropri, reali o immaginari) oppure dalla retta r stessa, nel caso in cui $r \subseteq Q$.
- L'intersezione di una quadrica con un piano è costituita da una conica, a meno che il piano non sia contenuto nella quadrica.

Definizione

L'intersezione di una quadrica Q non contenente il piano improprio $t' = 0$ è una conica, detta conica all'infinito della quadrica e si indica con C_∞, sulla quale giacciono tutti i punti impropri della quadrica.

- La conica C_∞ ha equazione:

$$\begin{cases} a_{11}{x'}^2 + 2a_{12}x'y' + 2a_{13}x'z' + a_{22}{y'}^2 + 2a_{23}y'z' + \\ + a_{33}{z'}^2 + 2a_{14}x't' + 2a_{24}y't' + 2a_{34}z't' + a_{44}{t'}^2 = 0 \\ t' = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a_{11}{x'}^2 + 2a_{12}x'y' + 2a_{13}x'z' + a_{22}{y'}^2 + 2a_{23}y'z' + a_{33}{z'}^2 = 0 \\ t' = 0. \end{cases}$$

  Pensando la conica C_∞ come contenuta nel piano $t' = 0$, la sua matrice associata è la matrice A, per cui deduciamo che la conica C_∞ è irriducibile $\iff |A| \neq 0$.

- Non ha senso chiedersi se la C_∞ è un'ellisse, una parabola o un'iperbole, perché i suoi punti sono tutti impropri. L'unica cosa che ci interessa della C_∞ è se è irriducibile o meno.

Osservazione

Sia Q una quadrica e π un piano. Sia $\Gamma = Q \cap \pi$ una conica e supponiamo che Γ sia irriducibile. Per stabilire la natura di Γ (cioè stabilire se è un'ellisse, una parabola o un'iperbole) si vanno a cercare i punti impropri di Γ e per fare questo bisogna fare l'intersezione col piano improprio $\pi_\infty \colon t' = 0$:

$$\Gamma \cap \pi_\infty = (Q \cap \pi) \cap \pi_\infty = (Q \cap \pi_\infty) \cap (\pi \cap \pi_\infty) = C_\infty \cap (\pi \cap \pi_\infty).$$

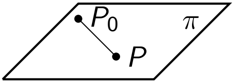
Dunque, i punti impropri di Γ sono i punti comuni alla conica all'infinito C_∞ della quadrica Q e alla retta impropria del piano π.

Vertice di una quadrica

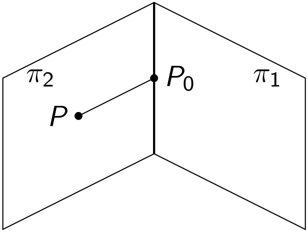
Definizione

Un punto P_0 di una quadrica Q è detto vertice per Q se la retta P_0P congiungente P_0 con un qualsiasi punto $P \in Q$ giace interamente sulla quadrica Q.

- I vertici di una quadrica spezzata in due piani coincidenti con un piano π sono tutti i punti del piano π.



- I vertici di una quadrica spezzata in due piani distinti (paralleli o meno) π_1 e π_2 sono tutti i punti della retta $\pi_1 \cap \pi_2$.



Teorema

Se una quadrica Q ha più di un vertice, allora è spezzata e, quindi, ha infiniti vertici.

DIMOSTRAZIONE.

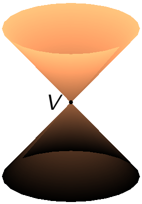
Teorema

Sia Q una quadrica di equazione ${}^t\underline{x}B\underline{x} = 0$. Un punto $P_0 = (x_0, y_0, z_0, t_0)$ è vertice per $Q \iff \underline{x}_0$ è soluzione del sistema lineare omogeneo $B\underline{x} = 0$.

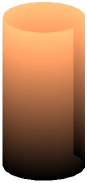
Definizione

Una quadrica priva di vertici si dice non degenere. Se una quadrica ha vertici si dice degenere. Una quadrica con un solo vertice si dice cono se esso è proprio. Una quadrica con un solo vertice si dice cilindro, se esso è improprio.

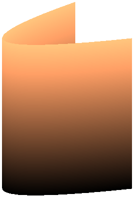
Coni e cilindri



Cono di vertice V



Cilindro ellittico



Cilindro parabolico

Cilindro iperbolico

Teorema

Sia Q una quadrica. Allora:

1. *Q è spezzata in due piani coincidenti* $\Leftrightarrow \rho(B) = 1$;
2. *Q è spezzata in due piani distinti* $\Leftrightarrow \rho(B) = 2$;
3. *Q è un cono o un cilindro* $\Leftrightarrow \rho(B) = 3$;
4. *Q è non degenere* $\Leftrightarrow \rho(B) = 4$.

Teorema

Sia Q un cono o un cilindro. Tutti e soli i piani che secano Q in una conica spezzata sono quelli passanti per il vertice V, cioè, dato un piano π:

$$Q \cap \pi \text{ è una conica spezzata } \iff V \in \pi.$$

DIMOSTRAZIONE.

Osservazione

La C_∞ di un cono è irriducibile, mentre la C_∞ di un cilindro è spezzata.

Corollario

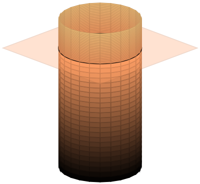
In uno stesso cono reale ci sono sezioni piane che sono iperboli parabole o ellissi. In un cilindro le sezioni piane fatte con piani propri, reali e non passanti per il vertice sono coniche tutte di uno stesso tipo.

DIMOSTRAZIONE.

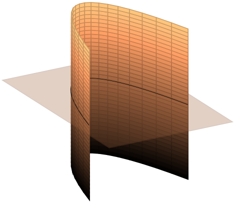
Definizione

Un cilindro si dice iperbolico se la C_∞ è spezzata in due rette reali e distinte. Un cilindro si dice parabolico se la C_∞ è spezzata in due rette reali e coincidenti. Un cilindro si dice ellittico se la C_∞ è spezzata in due rette immaginarie e coniugate.

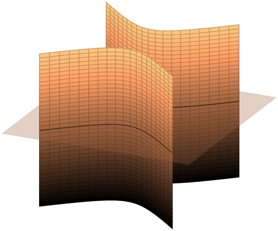
- Se $|B| \neq 0$, la quadrica è non degenere.
- Se $|B| = 0$, la quadrica è degenere.
  - Se $|A| \neq 0$, la C_∞ è irriducibile e la quadrica è un cono.
  - Se $|A| = 0$, la C_∞ è spezzata e la quadrica è un cilindro oppure è spezzata. È un cilindro se $\rho(B) = 3$, mentre è spezzata se $\rho(B) \leq 2$.



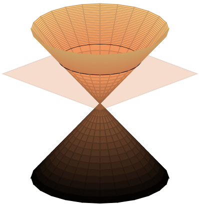
Cilindro ellittico



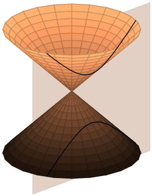
Cilindro parabolico



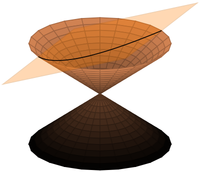
Cilindro iperbolico



Ellisse



Iperbole



Parabola

Quadriche non degeneri

Definizione

Una quadrica non degenere si dice:

1. ellissoide se la C_∞ è irriducibile e priva di punti reali
2. iperboloide se la C_∞ è irriducibile con punti reali
3. paraboloide se la C_∞ è spezzata.

- Se $|B| \neq 0$ e $|A| = 0$, la quadrica è non degenere e la C_∞ è spezzata, per cui la quadrica è un paraboloide.
- Se $|B| \neq 0$ e $|A| \neq 0$, la quadrica è non degenere e la C_∞ è irriducibile, per cui la quadrica è un ellissoide oppure un iperboloide.

Definizione

Data una quadrica Q, sia $P_0 \in Q$ un punto non vertice. Una retta r passante per P_0 si dice tangente alla quadrica Q nel punto P_0 se incontra Q in due punti coincidenti in P_0 oppure se giace sulla quadrica.

Teorema

Tutte e sole le rette tangenti ad una quadrica Q in un suo punto P_0 di coordinate $\underline{x}_0$ giacciono su uno stesso piano di equazione ${}^t\underline{x}_0 B \underline{x} = 0$.

Definizione

Il piano che contiene tutte le rette tangenti alla quadrica in un suo punto P_0 si dice piano tangente alla quadrica nel punto P_0 e ha equazione ${}^t\underline{x}_0 B \underline{x} = 0$.

Osservazione

Se una quadrica di equazione ${}^t\underline{x} B \underline{x} = 0$ passa per l'origine O e O non è un vertice, l'equazione del piano tangente in O è data dal complesso dei termini di primo grado $a_{14}x + a_{24}y + a_{34}z = 0$.

Teorema

Siano Q una quadrica irriducibile, $P_0 \in Q$ un punto non vertice e π_0 il piano tangente a Q in P_0. Allora la conica sezione $\Gamma = Q \cap \pi_0$ è spezzata. Viceversa, se un piano seca Q in una conica spezzata in due rette distinte r e s e $T = r \cap s$ non è vertice, allora π è tangente a Q in T; se π seca Q in una retta r contata due volte, allora π è tangente a Q lungo tutti i punti di r che non sono vertici.

Teorema

La conica sezione di una quadrica irriducibile Q di equazione ${}^t\underline{x}B\underline{x} = 0$ con il piano tangente π_0 in un punto reale non vertice P_0 è spezzata in due rette:

- *reali e distinte* $\iff |B| > 0$
- *reali e coincidenti* $\iff |B| = 0$
- *immaginarie e coniugate* $\iff |B| < 0$.

Definizione

Sia P_0 un punto reale reale di una quadrica irriducibile Q e sia π_0 piano in esso tangente a Q. P_0 si dice che è un punto:

1. iperbolico se $Q \cap \pi_0$ è spezzata in due rette reali e distinte
2. parabolico se $Q \cap \pi_0$ è spezzata in due rette reali e coincidenti
3. ellittico se $Q \cap \pi_0$ è spezzata in due rette immaginarie e coniugate.

Osservazione

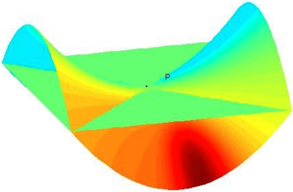
Se una quadrica irriducibile Q ha un punto iperbolico, allora tutti i suoi punti reali sono iperbolici. Se una quadrica irriducibile Q ha un punto parabolico, allora tutti i suoi punti reali sono parabolici. Se una quadrica irriducibile Q ha un punto ellittico, allora tutti i suoi punti reali sono ellittici.

Definizione

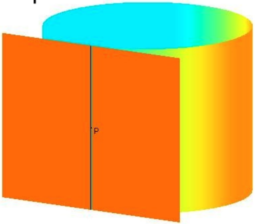
Si dice che una quadrica irriducibile Q è a punti:

1. iperbolici se Q ha un punto iperbolico
2. parabolici se Q ha un punto parabolico
3. ellittici se Q ha un punto ellittico.

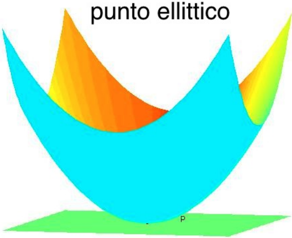
punto iperbolico



punto parabolico

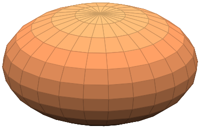


punto ellittico

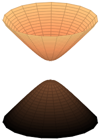


- Se $|B| = 0$, la quadrica è degenere e i suoi punti sono parabolici.
  - Se $|A| \neq 0$, la C_∞ è irriducibile e la quadrica è un cono.
  - Se $|A| = 0$, la C_∞ è spezzata e la quadrica è un cilindro oppure è spezzata. È un cilindro se $\rho(B) = 3$, mentre è spezzata se $\rho(B) \leq 2$.
- Se $|B| \neq 0$, la quadrica è non degenere e i suoi punti possono essere iperbolici o ellittici.
  - Se $|B| < 0$ e $|A| \neq 0$, la quadrica ha la C_∞ irriducibile e i suoi punti sono ellittici. Può essere un iperboloide ellittico o un ellissoide. Osserviamo che un ellissoide può avere solo punti ellittici.
  - Se $|B| > 0$ e $|A| \neq 0$ e la quadrica è reale, la quadrica ha la C_∞ irriducibile e i suoi punti sono iperbolici. È necessariamente un iperboloide iperbolico.
  - Se $|B| < 0$ e $|A| = 0$, la quadrica ha la C_∞ spezzata e i suoi punti sono ellittici. È necessariamente un paraboloide ellittico. Osserviamo che la sua C_∞ si spezza necessariamente in due rette immaginarie e coniugate.
  - Se $|B| > 0$ e $|A| = 0$, la quadrica ha la C_∞ spezzata e i suoi punti sono iperbolici. È necessariamente un paraboloide iperbolico. Osserviamo che la sua C_∞ si spezza necessariamente in due rette reali e distinte.

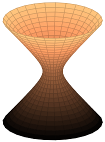
Quadriche non degeneri



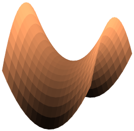
Ellissoide



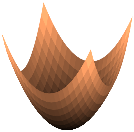
Iperboloide ellittico



Iperboloide iperbolico



Paraboloide iperbolico



Paraboloide ellittico

Forma canonica

Teorema

Sia Q una quadrica non degenere. Esiste un sistema di riferimento $O', \vec{X}, \vec{Y}, \vec{Z}, u$ tale che l'equazione della quadrica Q è di uno di questi tipi:

I) $\alpha X^2 + \beta Y^2 + \gamma Z^2 = \delta$

II) $\beta Y^2 + \gamma Z^2 = 2\delta X$,

dove $\alpha, \beta, \gamma, \delta \neq 0$.

Quindi, in un sistema di riferimento l'equazione di una quadrica non degenere assumerà una di queste due forme:

$$\frac{X^2}{\frac{\delta}{\alpha}} + \frac{Y^2}{\frac{\delta}{\beta}} + \frac{Z^2}{\frac{\delta}{\gamma}} = 1 \quad \text{o} \quad \frac{Y^2}{\frac{\delta}{\beta}} + \frac{Z^2}{\frac{\delta}{\gamma}} = 2X.$$

Dunque, a meno del cambio del nome degli assi e a secondo dei segni dei rapporti $\frac{\delta}{\alpha}$, $\frac{\delta}{\beta}$ e $\frac{\delta}{\gamma}$, le forma canoniche sono:

- $\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} + \frac{Z^2}{c^2} = 1$ per l'ellissoide reale
- $\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} + \frac{Z^2}{c^2} = -1$ per l'ellissoide immaginario
- $\frac{X^2}{a^2} - \frac{Y^2}{b^2} + \frac{Z^2}{c^2} = 1$ per l'iperboloide iperbolico (detto anche iperboloide a una falda)
- $\frac{X^2}{a^2} - \frac{Y^2}{b^2} - \frac{Z^2}{c^2} = 1$ per l'iperboloide ellittico (detto anche iperboloide a due falde)
- $\frac{Y^2}{b^2} + \frac{Z^2}{c^2} = 2X$ per il paraboloide ellittico
- $\frac{Y^2}{b^2} - \frac{Z^2}{c^2} = 2X$ per il paraboloide iperbolico (detto anche a sella).

Osserviamo che nella forma canonica per l'ellissoide gli autovalori della matrice A associata sono tutti dello stesso segno e per l'iperboloide ellittico sono presenti autovalori di segno opposto. Inoltre, osserviamo che per l'ellissoide immaginario si ha $|B| > 0$.

- Se $|B| = 0$, la quadrica è degenere e i suoi punti sono parabolici.
  - Se $|A| \neq 0$, la C_∞ è irriducibile e la quadrica è un cono.
  - Se $|A| = 0$, la C_∞ è spezzata e la quadrica è un cilindro oppure è spezzata. È un cilindro se $\rho(B) = 3$, mentre è spezzata se $\rho(B) \leq 2$.
- Se $|B| \neq 0$, la quadrica è non degenere e i suoi punti possono essere iperbolici o ellittici.
  - Se $|B| < 0$ e $|A| \neq 0$, la quadrica ha la C_∞ irriducibile e i suoi punti sono ellittici. Può essere un iperboloide ellittico o un ellissoide reale. Se gli autovalori di A hanno tutti lo stesso segno è un ellissoide reale, altrimenti è un iperboloide ellittico. Si può usare la regola dei segni di Cartesio.
  - Se $|B| > 0$ e $|A| \neq 0$, la quadrica ha la C_∞ irriducibile e, se la quadrica è reale, i suoi punti sono iperbolici. È un iperboloide iperbolico oppure è un ellissoide immaginario. Di nuovo, se gli autovalori di A hanno tutti lo stesso segno è un ellissoide immaginario, altrimenti è un iperboloide iperbolico. Si può usare la regola dei segni di Cartesio. Ovviamente, se la quadrica ha punti reali, è necessariamente un iperboloide iperbolico.
  - Se $|B| < 0$ e $|A| = 0$, la quadrica ha la C_∞ spezzata e i suoi punti sono ellittici. È necessariamente un paraboloide ellittico.
  - Se $|B| > 0$ e $|A| = 0$, la quadrica ha la C_∞ spezzata e i suoi punti sono iperbolici. È necessariamente un paraboloide iperbolico.

Prima di andare avanti fare esercizi da 3.2 a 3.17 dal libro di esercizi.

Sia Q una quadrica non degenere e sia π un piano. Sia $\Gamma = Q \cap \pi$ una conica irriducibile. Allora:

1. se Q è un'ellissoide, Γ è un'ellisse
2. se Q è un paraboloide iperbolico, Γ è una parabola oppure un'iperbole
3. se Q è un paraboloide ellittico, Γ è una parabola oppure un'ellisse
4. se Q è un iperboloide, Γ può essere un'ellisse, una parabola o un'iperbole.

DIMOSTRARE.

Sfere

Sia $C = (\alpha, \beta, \gamma)$ un punto dello spazio. Il luogo dei punti $P = (x, y, z)$ tali che $\overline{PC} = r > 0$ si chiama sfera di centro C e raggio r e si può scrivere nella forma:

$$(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 + (z-\gamma)^2 = r^2.$$

L'equazione generica di una sfera è:

$$x^2 + y^2 + z^2 + ax + by + cz + d = 0.$$

In tal caso $C = (-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2}, -\frac{c}{2})$ e $r = \sqrt{\frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4} + \frac{c^2}{4} - d}$. La C_∞ della sfera è:

$$\begin{cases} x'^2 + y'^2 + z'^2 = 0 \\ t' = 0 \end{cases}$$

ed è detta cerchio assoluto: essa può essere interpretata come il luogo dei punti ciclici dello spazio. I punti impropri delle circonferenze sono punti ciclici e giacciono sul cerchio assoluto. In particolare, un'ellisse è una circonferenza se i suoi punti impropri stanno sul cerchio assoluto.

Quadriche contenenti una conica

Sia $Q\colon f = 0$ una quadrica e sia $\pi\colon g = 0$ un piano. Sia $\Gamma = Q \cap \pi$:

$$\Gamma\colon \begin{cases} f = 0 \\ g = 0. \end{cases}$$

La generica quadrica contenente Γ ha equazione:

$$f + g(ax' + by' + cz' + dt') = 0.$$

Da notare che così facendo escludiamo le quadriche spezzate contenenti il piano π.

Come verificare la natura di una conica

Sia Γ una conica:

$$\Gamma\colon\ \begin{cases} f(x,y,z)=0 \\ ax+by+cz+d=0. \end{cases}$$

Supponiamo $a\neq 0$ (se si prende $b\neq 0$ o $c\neq 0$ si procede nello stesso modo). Allora:

$$\Gamma\colon\ \begin{cases} x=-\frac{b}{a}y+\frac{c}{a}z-\frac{d}{a} \\ f(-\frac{b}{a}y+\frac{c}{a}z-\frac{d}{a},y,z)=0. \end{cases}$$

$f(-\frac{b}{a}y+\frac{c}{a}z-\frac{d}{a},y,z)=g(y,z)$, per cui:

$$\Gamma\colon\ \begin{cases} g(y,z)=0 \\ x=-\frac{b}{a}y+\frac{c}{a}z-\frac{d}{a}. \end{cases}$$

$g(y,z)=0$ può essere una quadrica spezzata oppure un cilindro di vertice $X_\infty=(1,0,0,0)$, dal momento che manca la variabile x.

1. Se $g(y,z)=0$ è una quadrica spezzata, allora la conica Γ è spezzata.
2. Se $g(y,z)=0$ non è una quadrica spezzata, allora è un cilindro di vertice $X_\infty=(1,0,0,0)$. Ma X_∞ non appartiene al piano $x=-\frac{b}{a}y+\frac{c}{a}z-\frac{d}{a}$. Quindi, la conica Γ è irriducibile. Per stabilire la sua natura (iperbole, parabola o ellisse) si va a vedere se ha due punti impropri reali e distinti, reali e coincidenti o immaginari e coniugati.

CASO PARTICOLARE. Sia Γ una conica:

$$\Gamma\colon\ \begin{cases} f(x,y,z)=0 \\ ax+by+cz+d=0, \end{cases}$$

e sia $f(x,y,z)=0$ un cono o un cilindro di vertice V. Se V appartiene al piano $ax+by+cz+d=0$, allora Γ è una conica spezzata. Se V non appartiene al piano $ax+by+cz+d=0$, allora Γ è irriducibile e per stabilire la sua natura, si va a vedere se ha due punti impropri reali e distinti, reali e coincidenti o immaginari e coniugati.

Fare esercizi da 3.18 a 3.39 dal libro di esercizi ed esercizi da "Competenze minime UDE7" e "Tutte le competenze UDE7", reperibili su studium.