Numeri complessi

Un numero complesso è un'espressione della forma $a + ib$, dove $a, b \in \mathbb{R}$ e $i^2 = -1$. i è detta unità immaginaria e, naturalmente, non è un numero reale. L'insieme dei numeri complessi si indica con $\mathbb{C}$.

La somma e la moltiplicazione di due numeri complessi segue le solite regole del calcolo algebrico, ricordando sempre che $i^2 = -1$. Dunque:

$$(a + ib) + (c + id) = (a + c) + i(b + d)$$

e

$$\begin{aligned}(a + ib)(c + id) &= ac + iad + ibc + i^2 bd = \\ &= ac + iad + ibc - bd = (ac - bd) + i(ad + bc).\end{aligned}$$

Se $z = a + ib \in \mathbb{C}$, allora a è detta parte reale di z e b è detta parte immaginaria di z e scriviamo:

$$a = \mathrm{Re}(z) \quad \text{e} \quad b = \mathrm{Im}(z).$$

I numeri complessi con parte immaginaria nulla sono numeri reali, mentre i numeri complessi della forma ib sono detti immaginari puri.

Sia $z = a + ib \in \mathbb{C}$. Il numero complesso:

$$\overline{z} = a - ib$$

è detto coniugato di z. Osserviamo facilmente che:

$$z + \overline{z} = 2a$$

$$z\overline{z} = (a + ib)(a - ib) = a^2 - i^2 b^2 = a^2 + b^2.$$

Chiaramente, z è il coniugato di $\overline{z}$, per cui $z = \overline{\overline{z}}$. Un numero complesso è reale se e solo se coincide con il proprio coniugato. Inoltre, per ogni $z, v \in \mathbb{C}$ si ha:

$$\overline{z + v} = \overline{z} + \overline{v},$$

$$\overline{zv} = \overline{z}\,\overline{v},$$

$$\mathrm{Re}(z) = \frac{z + \overline{z}}{2} \quad \text{e} \quad \mathrm{Im}(z) = \frac{z - \overline{z}}{2i}.$$

Proprietà di somma e prodotto

Per la somma di numeri complessi valgono le seguenti proprietà:

- proprietà commutativa: $z + v = v + z$, $\forall z, v \in \mathbb{C}$;
- proprietà associativa: $(z + v) + w = z + (v + w)$, $\forall z, v, w \in \mathbb{C}$;
- esistenza dell'elemento neutro della somma, $0 = 0 + i0$: $z + 0 = 0 + z = z$, $\forall z \in \mathbb{C}$;
- esistenza dell'opposto: $\forall z = a + ib \in \mathbb{C}$, posto $-z = -a - ib$ si ha $z + (-z) = -z + z = 0$.

Per il prodotto di numeri complessi valgono le seguenti proprietà:

- proprietà commutativa: $zv = vz$, $\forall z, v \in \mathbb{C}$;
- proprietà associativa: $(zv)w = z(vw)$, $\forall z, v, w \in \mathbb{C}$;
- esistenza dell'elemento neutro del prodotto, $1 = 1 + i0$: $z \cdot 1 = 1 \cdot z = z$, $\forall z \in \mathbb{C}$;
- ogni elemento non nullo è invertibile: posto $z = a + ib \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$, da

$$z \cdot \overline{z} = \overline{z} \cdot z = a^2 + b^2$$

segue facilmente l'inverso di z è:

$$z^{-1} = \frac{\overline{z}}{a^2 + b^2} = \frac{a - ib}{a^2 + b^2} = \frac{a}{a^2 + b^2} - i\frac{b}{a^2 + b^2}.$$

Si vede facilmente che per ogni $z \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$ si ha:

$$\overline{z^{-1}} = \overline{z}^{-1}.$$

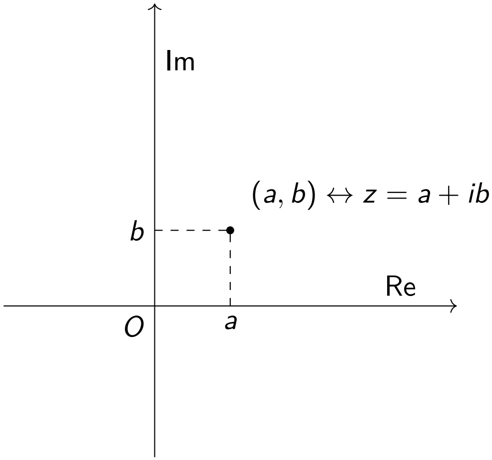
Osserviamo, infine, che:

$$z \cdot (v + w) = zv + zw, \quad \forall z, v, w \in \mathbb{C}.$$

Questo vuol dire che l'insieme dei numeri complessi $\mathbb{C}$ con queste operazioni di somma e prodotto è un campo.

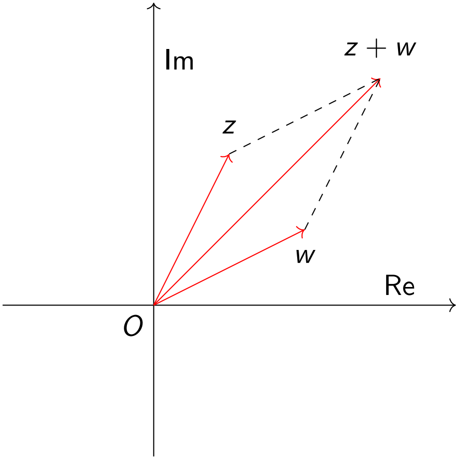
È importante osservare che non è possibile introdurre un ordinamento su $\mathbb{C}$, cioè non ha senso scrivere disuguaglianze tra numeri complessi. I numeri reali vengono rappresentati su una retta. I numeri complessi possono essere rappresentati in un piano. Si parla di piano complesso o piano di Gauss (o anche di Argand-Gauss).

Nel piano complesso i numeri reali vengono rappresentati sull'asse delle ascisse, mentre sull'asse delle ordinate vengono rappresentati i numeri immaginari puri.



Piano complesso

Se ad un numero complesso $z = a + ib$ associamo il vettore del piano di componenti (a, b), allora la somma di numeri complessi corrisponde alla somma di vettori.

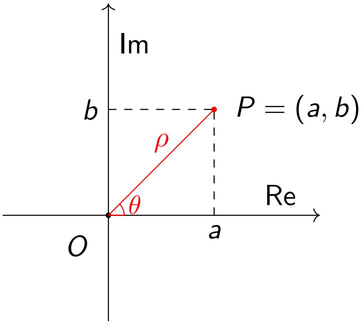


Il modulo di un numero complesso $z = a + ib$ è il numero reale $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$. Se z è un numero reale, allora il modulo di z coincide con il suo valore assoluto. Per ogni $z, w \in \mathbb{C}$, valgono le seguenti proprietà:

- $|z| \geq 0$,
- $|z| = 0$ se e solo se $z = 0$,
- $|z| = \sqrt{z\bar{z}}$,
- $z^{-1} = \dfrac{\bar{z}}{|z|^2}$,
- $|z + w| \leq |z| + |w|$ (proprietà triangolare),
- $|zw| = |z||w|$.

Forma trigonometrica di un numero complesso

Dato un numero complesso $z = a + ib$, sappiamo che possiamo identificarlo con il punto di coordinate $P = (a, b)$ del piano complesso. Possiamo, dunque, associare a questo punto le sue coordinate polari (ρ, θ), dove $\rho = \sqrt{a^2 + b^2} = |z|$ e $\theta \in [0, 2\pi[$, detto argomento di z, è l'angolo che il segmento OP forma con l'asse delle ascisse. Scriviamo $\theta = \arg(z)$.



Quindi:

$$a = \rho \cos\theta \quad \text{e} \quad b = \rho \sin\theta.$$

Questo vuol dire che:

$$z = \rho\cos\theta + i\rho\sin\theta \Rightarrow z = \rho(\cos\theta + i\sin\theta),$$

dove dunque:

$$\rho = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

e $\theta = \arg(z)$ è l'unico angolo in $[0, 2\pi[$ tale che:

$$\sin\theta = \frac{b}{|z|} = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

$$\cos\theta = \frac{a}{|z|} = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

La scrittura $z = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$ è detta forma trigonometrica del numero complesso z.

Non è difficile osservare che, dati due numeri complessi z, z':

$$z = \rho(\cos\theta + i\sin\theta) \quad \text{e} \quad z' = \rho'(\cos\theta' + i\sin\theta'),$$

con $\rho = |z|$, $\rho' = |z'|$, $\theta = \arg(z)$ e $\theta' = \arg(z')$, si ha:

$$zz' = \rho\rho'[\cos(\theta + \theta') + i\sin(\theta + \theta')].$$

Inoltre, per ogni $n \in \mathbb{N}$ si ha:

$$z^n = \rho^n[\cos(n\theta) + i\sin(n\theta)] \quad \text{(Formula di de Moivre)}.$$

Radici n-esime di un numero complesso

Proposizione

Siano $z \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$, $\rho = |z|$, $\theta = \arg(z)$, *e* $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$. *Allora l'equazione* $x^n = z$ *ha* n *soluzioni distinte date da:*

$$x_k = \sqrt[n]{\rho}\left[\cos\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right) + i \sin\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right)\right],$$

con $k = 0, 1, \ldots, n-1$.

In generale si dimostra:

Teorema (teorema fondamentale dell'algebra)

Ogni polinomio complesso di grado maggiore o uguale a 1 *ha almeno una radice complessa.*

Formula di Eulero

Per ogni $\theta \in \mathbb{R}$ si ha:

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta.$$

Dal momento che ogni numero complesso può essere scritto nella forma $z = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$, possiamo anche dire che:

$$z = \rho e^{i\theta}.$$

Prendendo $\theta = \pi$ abbiamo l'alertidentità di Eulero:

$$e^{i\pi} + 1 = 0.$$