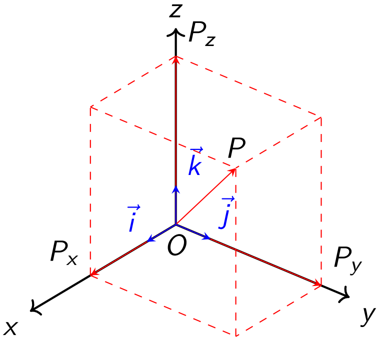
Richiami di calcolo vettoriale

Consideriamo il vettore libero $\vec{v} = \overrightarrow{OP}$. Siano P_x, P_y, P_z le proiezioni ortogonali di P sui tre assi cartesiani. $\vec{v}$ è la diagonale del parallelepipedo costruito su $\overrightarrow{OP_x}, \overrightarrow{OP_y}, \overrightarrow{OP_z}$, per cui:

$$\vec{v} = \overrightarrow{OP_x} + \overrightarrow{OP_y} + \overrightarrow{OP_z}.$$



$\overrightarrow{OP_x}, \overrightarrow{OP_y}, \overrightarrow{OP_z}$ sono le proiezioni ortogonali di $\vec{v}$ sugli assi $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$, per cui:

$$\overrightarrow{OP_x} = (\vec{v} \cdot \vec{i})\vec{i}$$

$$\overrightarrow{OP_y} = (\vec{v} \cdot \vec{j})\vec{j}$$

$$\overrightarrow{OP_z} = (\vec{v} \cdot \vec{k})\vec{k}$$

$$\Rightarrow \vec{v} = (\vec{v} \cdot \vec{i})\vec{i} + (\vec{v} \cdot \vec{j})\vec{j} + (\vec{v} \cdot \vec{k})\vec{k}.$$

$\vec{v} = (\vec{v} \cdot \vec{i})\vec{i} + (\vec{v} \cdot \vec{j})\vec{j} + (\vec{v} \cdot \vec{k})\vec{k}$, dove $\vec{v} \cdot \vec{i}$, $\vec{v} \cdot \vec{j}$, $\vec{v} \cdot \vec{k}$ sono le coordinate del punto P e sono anche dette componenti del vettore $\vec{v}$. Poniamo $\vec{v} \cdot \vec{i} = v_x$, $\vec{v} \cdot \vec{j} = v_y$, $\vec{v} \cdot \vec{k} = v_z$, per cui:

$$\vec{v} = v_x\vec{i} + v_y\vec{j} + v_z\vec{k}$$

e le componenti di $\vec{v}$ sono (v_x, v_y, v_z). Inoltre, $|\vec{v}| = \sqrt{v_x^2 + {v_y}^2 + {v_z}^2}$. Se $P_1 = (x_1, y_1, z_1)$ e $P_2 = (x_2, y_2, z_2)$, allora:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{P_1P_2} = \overrightarrow{OP_2} - \overrightarrow{OP_1} = x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k} - (x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}) = \\ = (x_2 - x_1)\vec{i} + (y_2 - y_1)\vec{j} + (z_2 - z_1)\vec{k}.\end{aligned}$$

$$|\overline{P_1P_2}| = |\overrightarrow{P_1P_2}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

Se $\vec{v} = v_x\vec{i} + v_y\vec{j} + v_z\vec{k}$ e $\vec{w} = w_x\vec{i} + w_y\vec{j} + w_z\vec{k}$, allora:

$$\vec{v}+\vec{w} = v_x\vec{i}+v_y\vec{j}+v_z\vec{k}+w_x\vec{i}+w_y\vec{j}+w_z\vec{k} = (v_x+w_x)\vec{i}+(v_y+w_y)\vec{j}+(v_z+w_z)\vec{k}.$$

Se $a \in \mathbb{R}$, allora:

$$a\vec{v} = a(v_x\vec{i} + v_y\vec{j} + v_z\vec{k}) = (av_x)\vec{i} + (av_y)\vec{j} + (av_z)\vec{k}.$$

Inoltre:

$$\vec{v} \cdot \vec{w} = v_x w_x + v_y w_y + v_z w_z.$$

Se $\vec{v}, \vec{w} \neq \vec{0}$, allora:

$$\cos \widehat{\vec{v}\vec{w}} = \frac{\vec{v} \cdot \vec{w}}{|\vec{v}| \cdot |\vec{w}|} = \frac{v_x w_x + v_y w_y + v_z w_z}{\sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}\sqrt{w_x^2 + w_y^2 + w_z^2}}$$

In particolare, $\vec{v} \perp \vec{w} \Leftrightarrow v_x w_x + v_y w_y + v_z w_z = 0$.
Fare esercizi 1.1 e 1.2 dal libro di esercizi.

$$\vec{v} \wedge \vec{w} = (v_y w_z - v_z w_y)\vec{i} + (w_x v_z - v_x w_z)\vec{j} + (v_x w_y - v_y w_x)\vec{k} =$$

$$= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ v_x & v_y & v_z \\ w_x & w_y & w_z \end{vmatrix}$$

Se $\vec{u} = u_x\vec{i} + u_y\vec{j} + u_z\vec{k}$, allora:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} \wedge \vec{w} = (v_y w_z - v_z w_y)u_x + (w_x v_z - v_x w_z)u_y + (v_x w_y - v_y w_x)u_z =$$

$$= \begin{vmatrix} u_x & u_y & u_z \\ v_x & v_y & v_z \\ w_x & w_y & w_z \end{vmatrix}$$

Coordinate cartesiane e coordinate omogenee

Fissiamo nel piano un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $O, \vec{x}, \vec{y}, u$. Ad ogni punto P del piano possiamo associare le coordinate cartesiane (x, y), che sono dette anche coordinate non omogenee del punto P, e il punto P è detto punto proprio.

Ad ogni punto $P = (x, y)$ del piano possiamo associare altre coordinate, dette coordinate omogenee o proiettive. Queste coordinate sono terne ordinate di numeri reali, con $t' \neq 0$, definite a meno di un fattore di proporzionalità, tali che:

$$x = \frac{x'}{t'}, \quad y = \frac{y'}{t'}.$$

A questi punti del piano aggiungiamo altri punti, detti punti impropri. Un punto si dice improprio quando le sue coordinate omogenee, definite sempre a meno di un fattore di proporzionalità, sono del tipo $(x', y', 0)$ e x', y' non sono entrambe nulle.

La terna $(0,0,0)$ non rappresenta alcun punto. Tutti i punti impropri del piano hanno la terza coordinate nulla, cioè sono tali che $t' = 0$. I punti propri e impropri del piano formano il piano proiettivo.
Fissiamo nello spazio S un sistema di coordinate $O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}, u$. Ad ogni punto P dello spzio associamo le coordinate cartesiane, dette coordinate non omogenee del punto P. Introduciamo anche nello spazio le coordinate omogenee o proiettive: il punto P può essere individuato mediante quaterne (x', y', z', t') di numeri reali, non tutti nulli, con $t' \neq 0$, definite a meno di un fattore di proporzionalità, legate alle coordinate non omogenee dalle relazioni:

$$x = \frac{x'}{t'}, \quad y = \frac{y'}{t'}, \quad z = \frac{z'}{t'}.$$

Introduciamo nuovi punti, i punti impropri dello spazio, caratterizzati dall'avere l'ultima coordinata nulla, cioè $t' = 0$. I punti, propri o impropri, con coordinate non tutte reali sono detti immaginari. L'insieme di tutti i punti dello spazio, propri o impropri, reali o immaginari, è detto spazio proiettivo.

Rette nello spazio e nel piano

Una retta r nello spazio è perfettamente determinata assegnando un suo punto proprio P_0 e un vettore non nullo $\vec{v}$ ad essa parallelo, $\vec{v}$ è anche detto vettore direttivo. Se $\vec{v} = l\vec{i} + m\vec{j} + n\vec{k}$, allora (l, m, n) sono anche detti numeri o parametri direttori della retta r. I punti $P \in r$ sono tutti e soli i punti tali che il vettore $\overrightarrow{P_0P}$ è parallelo al vettore $\vec{v}$. Quindi, esiste $t \in \mathbb{R}$ tale che:

$$\overrightarrow{P_0P} = t\vec{v}.$$

Questa si chiama equazione vettoriale della retta. Se $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ e $P = (x, y, z)$, allora $\overrightarrow{P_0P} = (x - x_0)\vec{i} + (y - y_0)\vec{j} + (z - z_0)\vec{k}$ e:

$$\overrightarrow{P_0P} = t\vec{v} \Leftrightarrow (x - x_0)\vec{i} + (y - y_0)\vec{j} + (z - z_0)\vec{k} = t(l\vec{i} + m\vec{j} + n\vec{k}),$$

cioè:

$$\begin{cases} x - x_0 = lt \\ y - y_0 = mt \\ z - z_0 = nt. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = x_0 + lt \\ y = y_0 + mt \\ z = z_0 + nt. \end{cases}$$

Queste sono le equazioni parametriche della retta.

Viceversa, assegnando una terna $(l, m, n) \neq (0, 0, 0)$, la retta avente equazioni parametriche:

$$\begin{cases} x = x_0 + lt \\ y = y_0 + mt \\ z = z_0 + nt \end{cases}$$

è esattamente quella passante per $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ e parallela al vettore di componenti (l, m, n).

Siano $l, m, n \neq 0$. Allora la retta r si scrive nella forma:

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n}.$$

Sia $l = 0, m, n \neq 0$. Allora:

$$\begin{cases} x = x_0 \\ \dfrac{y - y_0}{m} = \dfrac{z - z_0}{n}. \end{cases}$$

Sia $m = 0, l, n \neq 0$. Allora:

$$\begin{cases} y = y_0 \\ \dfrac{x - x_0}{l} = \dfrac{z - z_0}{n}. \end{cases}$$

Sia $n = 0, l, m \neq 0$. Allora:

$$\begin{cases} z = z_0 \\ \dfrac{x - x_0}{l} = \dfrac{y - y_0}{m}. \end{cases}$$

Sia $l = m = 0$ e $n \neq 0$, cioè $\vec{v} \parallel \vec{z}$. Allora:

$$\begin{cases} x = x_0 \\ y = y_0. \end{cases}$$

Sia $l = n = 0$ e $m \neq 0$, cioè $\vec{v} \parallel \vec{y}$. Allora:

$$\begin{cases} x = x_0 \\ z = z_0. \end{cases}$$

Sia $m = n = 0$ e $l \neq 0$, cioè $\vec{v} \parallel \vec{x}$. Allora:

$$\begin{cases} y = y_0 \\ z = z_0. \end{cases}$$

Siano P_0, P_1 due punti dello spazio, con $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ e $P_1 = (x_1, y_1, z_1)$. La retta r passante per P_0 e P_1 ha come vettore direttivo il vettore:

$$\overrightarrow{P_0 P_1} = (x_1 - x_0)\vec{i} + (y_1 - y_0)\vec{j} + (z_1 - z_0)\vec{k}.$$

Quindi, l'equazione della retta per due punti è:

$$\begin{cases} x = x_0 + (x_1 - x_0)t \\ y = y_0 + (y_1 - y_0)t \\ z = z_0 + (z_1 - z_0)t \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{y - y_0}{y_1 - y_0} = \frac{z - z_0}{z_1 - z_0}.$$

Anche nel piano una retta è perfettamente determinata assegnando un suo punto $P_0 = (x_0, y_0)$ e un vettore direttivo $\vec{v} = l\vec{i} + m\vec{j}$ non nullo ad essa parallelo. I punti $P \in r$ sono caratterizzati dalla condizione $\overrightarrow{P_0P} \parallel \vec{v}$, in modo che per qualche $t \in \mathbb{R}$:

$$\overrightarrow{P_0P} = t\vec{v}.$$

Questa è l'equazione vettoriale di r. Se $P_0 = (x_0, y_0)$ e $P = (x, y)$, allora $\overrightarrow{P_0P} = (x - x_0)\vec{i} + (y - y_0)\vec{j}$ e:

$$\overrightarrow{P_0P} = t\vec{v} \Leftrightarrow (x - x_0)\vec{i} + (y - y_0)\vec{j} = t(l\vec{i} + m\vec{j}),$$

cioè:

$$\begin{cases} x - x_0 = lt \\ y - y_0 = mt \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = x_0 + lt \\ y = y_0 + mt. \end{cases}$$

Queste sono le equazioni parametriche della retta.

Se $l = 0$, allora $\vec{v} \parallel \vec{y}$ e la retta ha equazione $x = x_0$.

Se $m = 0$, allora $\vec{v} \parallel \vec{x}$ e la retta ha equazione $y = y_0$.

Se $l, m \neq 0$, allora abbiamo:

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m}$$

$$\Rightarrow m(x - x_0) - l(y - y_0) = 0 \Rightarrow mx - ly - mx_0 + ly_0 = 0.$$

Se poniamo $m = a$, $-l = b$ e $-mx_0 + ly_0 = c$, troviamo l'equazione della retta $ax + by + c = 0$.
Se $P = (x_0, y_0)$ e $P_1 = (x_1, y_1)$ sono due punti di una retta r, allora un vettore direttivo è $\overrightarrow{P_0P_1} = (x_1 - x_0)\vec{i} + (y_1 - y_0)\vec{j}$. Quindi, l'equazione della retta per P_0 e P_1 è:

$$\frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{y - y_0}{y_1 - y_0}.$$

Se $x_1 - x_0 = 0$, allora la retta ha equazione $x = x_0$. Se $y_1 - y_0 = 0$, allora la retta ha equazione $y = y_0$.

Nel piano (non nello spazio) una retta r può anche essere individuata da un suo punto $P_0 = (x_0, y_0)$ e da un vettore non nullo $\vec{n} = a\vec{i} + b\vec{j}$ ad essa ortogonale. In tal caso, la retta r è il luogo dei punti $P = (x, y)$ tali che $\overrightarrow{P_0P} \perp \vec{n}$. Dunque, deve accadere:

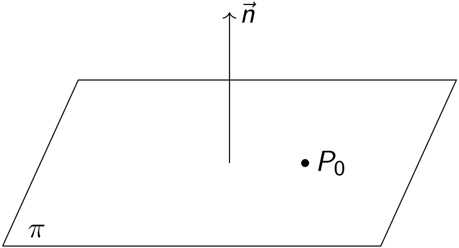
$$\overrightarrow{P_0P} \cdot \vec{n} = 0.$$

Dato che $\overrightarrow{P_0P} = (x - x_0)\vec{i} + (y - y_0)\vec{j}$, allora abbiamo:

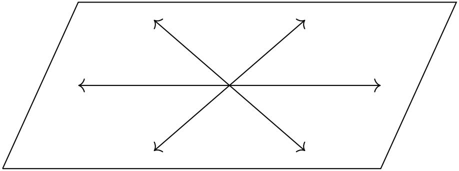
$$a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0 \Rightarrow ax + by - ax_0 - by_0 = 0.$$

Ponendo $c = -ax_0 - by_0$ troviamo l'equazione della retta $ax + by + c = 0$. Quindi, una qualunque retta r del piano si può rappresentare con un'equazione $ax + by + c = 0$, con $(a, b) \neq (0, 0)$, nel senso che tutti e soli i punti di r soddisfano con le loro coordinate questa equazione. Osserviamo che, se l'equazione della retta r è $ax + by + c = 0$, allora (a, b) sono le componenti di un vettore perpendicolare a r e $(b, -a)$ sono le componenti di un vettore parallelo a r.

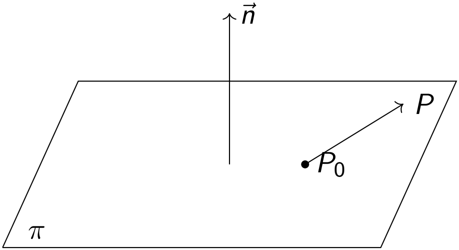
Un piano π nello spazio è perfettamente determinato assegnando un suo punto $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ e un vettore non nullo $\vec{n} = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}$ ad esso ortogonale.



Notiamo che i vettori paralleli a un piano sono infiniti:



I punti $P = (x, y, z) \in \pi$ sono tutti e soli i punti tali che $\overrightarrow{P_0P} \perp \vec{n}$,



cioè quelli per i quali:

$$\overrightarrow{P_0P} \cdot \vec{n} = 0.$$

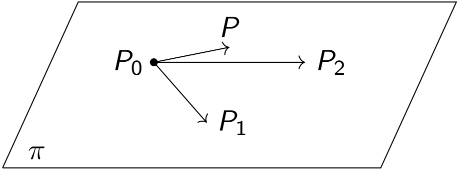
Dal momento che $\overrightarrow{P_0P} = (x - x_0)\vec{i} + (y - y_0)\vec{j} + (z - z_0)\vec{k}$ e $\vec{n} = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}$, deve essere:

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0.$$

Ponendo $d = -ax_0 - by_0 - cz_0$, vediamo che il piano π ha equazione $ax + by + cz + d = 0$.

Se $ax + by + cz + d = 0$ è un'equazione e $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$, allora essa rappresenta un piano ben preciso. Infatti, se (x_0, y_0, z_0) è una sua soluzione, allora è l'equazione del piano passante per $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ e ortogonale al vettore di componenti (a, b, c).

Un piano π è anche determinato assegnando tre suoi punti $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$, $P_1 = (x_1, y_1, z_1)$ e $P_2 = (x_2, y_2, z_2)$. In tal caso, i punti $P = (x, y, z)$ del piano π sono tutti e soli quelli per i quali i vettori $\overrightarrow{P_0P}$, $\overrightarrow{P_0P_1}$, $\overrightarrow{P_0P_2}$ sono complanari:



Questo vuol dire che deve essere nullo il seguente prodotto misto:

$$\overrightarrow{P_0P} \cdot \overrightarrow{P_0P_1} \wedge \overrightarrow{P_0P_2} = 0.$$

Dal momento che $\overrightarrow{P_0P} = (x - x_0)\vec{i} + (y - y_0)\vec{j} + (z - z_0)\vec{k}$,
$\overrightarrow{P_0P_1} = (x_1 - x_0)\vec{i} + (y_1 - y_0)\vec{j} + (z_1 - z_0)\vec{k}$,
$\overrightarrow{P_0P_2} = (x_2 - x_0)\vec{i} + (y_2 - y_0)\vec{j} + (z_2 - z_0)\vec{k}$, si ha che
$\overrightarrow{P_0P} \cdot \overrightarrow{P_0P_1} \wedge \overrightarrow{P_0P_2} = 0$ se e solo se:

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ x_1 - x_0 & y_1 - y_0 & z_1 - z_0 \\ x_2 - x_0 & y_2 - y_0 & z_2 - z_0 \end{vmatrix} = 0.$$

Osservazione

Ogni retta dello spazio è intersezione di due piani e ogni intersezione di due piani è una retta. Quindi, una retta può essere determinata in tre modi:

1. tramite un suo punto e un vettore ad essa parallelo
2. tramite due suoi punti
3. tramite due piani che la contengono.

Punti impropri di un piano

Sia $ax + by + cz + d = 0$ un piano π. Passiamo alle coordinate omogenee:

$$x = \frac{x'}{t'}, y = \frac{y'}{t'}, z = \frac{z'}{t'} \Rightarrow a\frac{x'}{t'} + b\frac{y'}{t'} + c\frac{z'}{t'} + d = 0.$$

Moltiplicando per t' otteniamo l'equazione del piano in coordinate omogenee:

$$ax' + by' + cz' + dt' = 0.$$

I punti impropri dello spazio sono caratterizzati dalla condizione $t' = 0$: questa è l'equazione del piano improprio, che è il luogo di tutti i punti impropri dello spazio. Cerchiamo i punti impropri di π:

$$\begin{cases} ax' + by' + cz' + dt' = 0 \\ t' = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ax' + by' + cz' = 0 \\ t' = 0. \end{cases}$$

Questo è il luogo dei punti impropri del piano π e viene detto retta impropria del piano π. È una retta i cui punti sono tutti impropri ed è contenuta nel piano π.

Punto improprio di una retta

Sia r una retta dello spazio e siano $\pi\colon ax + by + cz + d = 0$ e $\pi'\colon a'x + b'y + c'z + d' = 0$ due piani che la contengono. Allora:

$$r\colon \begin{cases} ax + by + cz + d = 0 \\ a'x + b'y + c'z + d' = 0. \end{cases}$$

Dato che r è una retta propria, le terne (a, b, c) e (a', b', c') non sono proporzionali. Per trovare il punto improprio di r dobbiamo risolvere il sistema:

$$\begin{cases} ax' + by' + cz' + dt' = 0 \\ a'x' + b'y' + c'z' + d't' = 0 \\ t' = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ax' + by' + cz' = 0 \\ a'x' + b'y' + c'z' = 0 \\ t' = 0. \end{cases}$$

Per trovare le prime tre coordinate omogenee x', y', z' occorre risolvere un sistema omogeneo di due equazioni in tre incognite. Dal momento che (a, b, c) e (a', b', c') non sono proporzionali, questo sistema ha soluzioni tutte proporzionali tra loro, per cui otteniamo un solo punto, cioè una retta propria ha un unico punto improprio.

Nel piano sia r una retta di equazione $ax + by + c = 0$. In coordinate omogenee sarà $ax' + by' + ct' = 0$. Il punto imporprio della retta r si trova risolvendo il sistema:

$$\begin{cases} ax' + by' + ct' = 0 \\ t' = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ax' + by' = 0 \\ t' = 0. \end{cases}$$

Una soluzione del sistema è $(b, -a, 0)$ e tutte le altre sono proporzionali ad essa, per cui anche nel piano una retta ha un unico punto improprio ed è $P_\infty = (b, -a, 0)$. Osserviamo che $(b, -a)$ sono le componenti di un vettore parallelo alla retta.

Proposizione

Nello spazio le prime tre coordinate omogenee del punto improprio di una retta reale e propria sono parametri direttori della retta.

DIMOSTRAZIONE.

Fare esercizi da 1.3 a 1.10 e da 1.60 a 1.64 dal libro di esercizi.

Parallelismo e ortogonalità

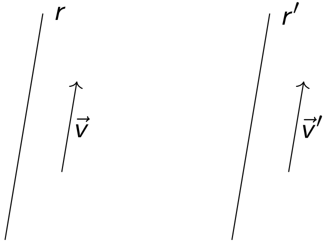
Siano r e r' due rette reali e distinte e siano $\vec{v} = l\vec{i} + m\vec{j} + n\vec{k}$ e $\vec{v}' = l'\vec{i} + m'\vec{j} + n'\vec{k}$ vettori ad esse parallele. Allora:

$$r \parallel r' \iff \vec{v} \parallel \vec{v}' \iff \exists \rho \in \mathbb{R}\, \rho \neq 0 \mid \vec{v} = \rho\vec{v}'$$

cioè

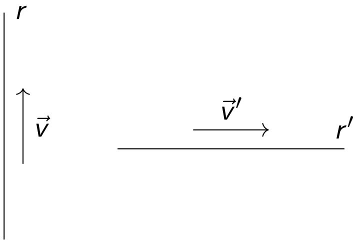
$$(l, m, n) = \rho(l', m', n').$$

Osserviamo che due rette parallele hanno lo stesso punto improprio.



Inoltre:

$$r \perp r' \iff \vec{v} \perp \vec{v}' \iff \vec{v} \cdot \vec{v}' = 0 \iff ll' + mm' + nn' = 0.$$



Siano $r\colon ax+by+c=0$ e $r'\colon a'x+b'y+c'=0$ due rette reali e distinte nel piano. Allora:

$$\vec{n}=a\vec{i}+b\vec{j}\perp r \quad \text{e} \quad \vec{n}'=a'\vec{i}+b'\vec{j}\perp r'.$$

Dunque:

$$r \parallel r' \iff \vec{n}\parallel \vec{n}' \iff \exists \rho\in\mathbb{R}\,\rho\neq 0 \mid \vec{n}=\rho\vec{n}' \iff (a,b)=\rho(a',b')$$

cioè

$$ab'-a'b=0.$$

Inoltre:

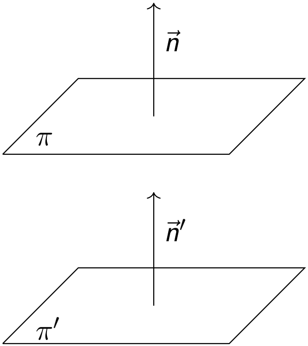
$$r\perp r' \iff \vec{n}\perp\vec{n}' \iff \vec{n}\cdot\vec{n}'=0 \iff aa'+bb'=0.$$

Siano $\pi\colon ax + by + cz + d = 0$ e $\pi'\colon a'x + b'y + c'z + d' = 0$ due piani. Allora:

$$\vec{n} = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k} \perp \pi \quad \text{e} \quad \vec{n}' = a'\vec{i} + b'\vec{j} + c'\vec{k} \perp \pi'.$$

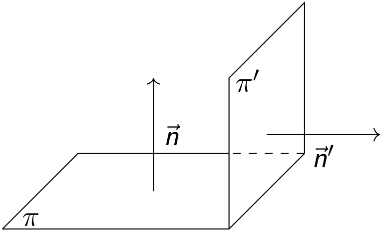
Quindi:

$$\pi \parallel \pi' \iff \vec{n} \parallel \vec{n}' \iff \exists \rho \in \mathbb{R},\ \rho \neq 0 \mid \vec{n} = \rho \vec{n}' \iff (a, b, c) = \rho(a', b', c')$$



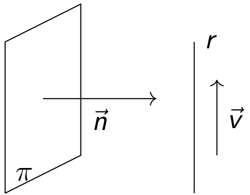
Osserviamo che due piani paralleli hanno la stessa retta impropria.
Inoltre:

$$\pi \perp \pi' \iff \vec{n} \perp \vec{n}' \iff \vec{n} \cdot \vec{n}' = 0 \iff aa' + bb' + cc' = 0.$$



Siano r una retta propria e π un piano proprio. Siano $\vec{v} = l\vec{i} + m\vec{j} + n\vec{k} \parallel r$ e $\vec{n} = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k} \perp \pi$. Allora:

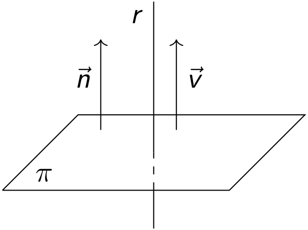
$$r \parallel \pi \iff \vec{v} \perp \vec{n} \iff \vec{v} \cdot \vec{n} = 0 \iff al + bm + cn = 0.$$



In tal caso, il punto improprio di r appartiene alla retta impropria del piano π.

Inoltre:

$$r \perp \pi \iff \vec{v} \parallel \vec{n} \iff \exists \rho \in \mathbb{R},\ \rho \neq 0 \mid \vec{v} = \rho \vec{n} \iff (l, m, n) = \rho(a, b, c).$$



Fare esercizi da 1.11 a 1.24 dal libro di esercizi.

Intersezioni

Intersezione di due rette proprie nel piano. Siano $r\colon ax+by+c=0$ e $r'\colon a'x+b'y+c'=0$ due rette reali e distinte nel piano.

- Se $ab'-a'b\neq 0$, allora le rette r e r' non sono parallele, ma sono incidenti e hanno in comune un punto proprio, che si ottiene risolvendo il sistema:
$$\begin{cases} ax+by=-c \\ a'x+b'y=-c'. \end{cases}$$
- Se $ab'-a'b=0$, allora le rette r e r' sono parallele e hanno in comune il punto improprio $P_\infty=(b,-a,0)$. Si dice che le due rette si incontrano all'infinito.

Dunque, due rette nel piano hanno sempre un punto in comune, proprio o improprio.

Intersezione di due rette proprie nello spazio. Consideriamo due rette distinte r_1 e r_2 nello spazio. Allora:

$$r_1\colon \begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0 \\ a_1'x + b_1'y + c_1'z + d_1' = 0 \end{cases} \quad \text{e} \quad r_2\colon \begin{cases} a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0 \\ a_2'x + b_2'y + c_2'z + d_2' = 0. \end{cases}$$

Scriviamo le due rette in forma omogenea:

$$r_1\colon \begin{cases} a_1x' + b_1y' + c_1z' + d_1t' = 0 \\ a_1'x' + b_1'y' + c_1'z' + d_1't' = 0 \end{cases} \text{ e } r_2\colon \begin{cases} a_2x' + b_2y' + c_2z' + d_2t' = 0 \\ a_2'x' + b_2'y' + c_2'z' + d_2't' = 0 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow r_1 \cap r_2\colon \begin{cases} a_1x' + b_1y' + c_1z' + d_1t' = 0 \\ a_1'x' + b_1'y' + c_1'z' + d_1't' = 0 \\ a_2x' + b_2y' + c_2z' + d_2t' = 0 \\ a_2'x' + b_2'y' + c_2'z' + d_2't' = 0. \end{cases}$$

Questo è un sistema omogeneo di quattro equazioni in quattro incognite. Ha certamente la soluzione banale $(0,0,0,0)$, che non rappresenta alcun punto, e, perché abbia soluzioni non banali (cioè perché le rette abbiano un punto in comune), il determinante della matrice dei coefficienti deve essere 0.

Definizione

Due rette r_1 e r_2 nello spazio sono dette sghembe se non hanno alcun punto in comune, proprio o improprio. Se si incontrano in un punto, proprio o improprio, appartengono a uno stesso piano e si dicono complanari.
Due rette sono sghembe se non esiste alcun piano che le contiene entrambe.

Intersezione di piani nello spazio.

Proposizione

Nello spazio due piani distinti hanno sempre una retta in comune. Se i due piani sono propri e non paralleli, allora è una retta propria e i due piani sono detti incidenti. Se uno dei due piani è improprio o se i due piani sono paralleli, la retta è impropria.

Infatti, due piani propri $\pi\colon ax' + by' + cz' + dt' = 0$ e $\pi'\colon a'x' + b'y' + c'z' + d't' = 0$ hanno in comune una retta propria se (a, b, c) e (a', b', c') non sono proporzionali; sono paralleli e hanno in comune la loro retta impropria se (a, b, c) e (a', b', c') sono proporzionali.

Intersezione di una retta e di un piano propri.

Siano r e π una retta e un piano rispettivamente:

$$r: \begin{cases} x = x_0 + lt \\ y = y_0 + mt \\ z = z_0 + nt \end{cases} \quad \text{e} \quad \pi: ax + by + cz + d = 0.$$

Allora:

$$r \cap \pi: \begin{cases} x = x_0 + lt \\ y = y_0 + mt \\ z = z_0 + nt \\ ax + by + cz + d = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = x_0 + lt \\ y = y_0 + mt \\ z = z_0 + nt \\ (al + bm + cn)t + \\ \quad + ax_0 + by_0 + cz_0 + d = 0. \end{cases}$$

Se $al + bm + cn \neq 0$, allora retta e piano non sono paralleli e il sistema ammette una soluzione, cioè hanno in comune un punto proprio. Se $al + bm + cn = 0$, allora il sistema non ammette soluzioni e retta e piano sono paralleli. In tal caso, tuttavia, il punto improprio della retta $(l, m, n, 0)$ appartiene alla retta impropria del piano, che ha equazioni:

$$\begin{cases} ax' + by' + cz' + dt' = 0 \\ t' = 0. \end{cases}$$

Fasci di piani nello spazio e fasci di rette nel piano

Definizione

Siano $\pi: ax' + by' + cz' + dt' = 0$ e $\pi': a'x' + b'y' + c'z' + d't' = 0$ due piani distinti. Chiamiamo fascio di piani determinato da π e π' la totalità dei piani la cui equazione è combinazione lineare delle loro equazioni e cioè:

$$\lambda(ax' + by' + cz' + dt') + \mu(a'x' + b'y' + c'z' + d't') = 0,$$

al variare di λ, $\mu \in \mathbb{R}$, non entrambi nulli.

Per individuare un piano del fascio si devono assegnare λ e μ, a meno di un fattore di proporzionalità, cioè è sufficiente assegnare $\frac{\lambda}{\mu}$ oppure $\frac{\mu}{\lambda}$.
La retta $r = \pi \cap \pi'$ è detta asse del fascio. Per un punto $P_0 \notin r$ passa un solo piano del fascio.

Proposizione

I piani del fascio determinato da π e π' sono tutti e soli i piani passanti per l'asse del fascio $r = \pi \cap \pi'$.

DIMOSTRAZIONE.

Corollario

Se $r = \pi \cap \pi'$ *è una retta propria, allora i piani del fascio sono tutti e soli quelli passanti per* r*. Se i piani* π *e* π' *sono paralleli, allora i piani del fascio sono tutti e soli quelli paralleli a entrambi.*

Osservazione

Un fascio di piani è individuato da due suoi piani qualsiasi.

Fare esercizi da 1.25 a 1.33 dal libro di esercizi.

Siano $r\colon ax' + by' + ct' = 0$ e $r\colon a'x' + b'y' + c't' = 0$ due rette distinte nel piano. Sappiamo che r e r' hanno in comune un punto $\overline{P}$, proprio o improprio.

Definizione

Chiamiamo fascio di rette individuato da r e r' la totalità delle rette la cui equazione è una combinazione lineare delle equazioni delle due rette:

$$\lambda(ax' + by' + ct') + \mu(a'x' + b'y' + c't') = 0,$$

al variare di λ, $\mu \in \mathbb{R}$, non entrambi nulli.

Per individuare una retta del fascio si devono assegnare λ e μ, a meno di un fattore di proporzionalità, cioè è sufficiente assegnare $\frac{\lambda}{\mu}$ oppure $\frac{\mu}{\lambda}$. Per un punto $P_0 \neq \overline{P}$ passa una sola retta del fascio.

Proposizione

Le rette del fascio individuato da r e r' sono tutte e sole le rette passanti per $\overline{P} = r \cap r'$.

DIMOSTRAZIONE.

Corollario

Se le rette r e r' sono incidenti in un punto proprio, allora le rette del fascio sono tutte e sole quelle passanti per questo punto. Se le rette sono parallele, allora le rette del fascio sono tutte e sole le rette parallele alle due assegnate.

Osservazione

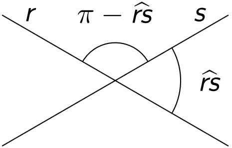
Un fascio di rette è individuato da due sue rette qualsiasi. Inoltre, se $P_0 = (x_0, y_0)$, il fascio di rette passanti per P_0 si può scrivere nella forma $a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0$. Ponendo $m = -\frac{a}{b}$, abbiamo:

$$y - y_0 = m(x - x_0).$$

In tal caso viene esclusa la retta di equazione $x = x_0$.

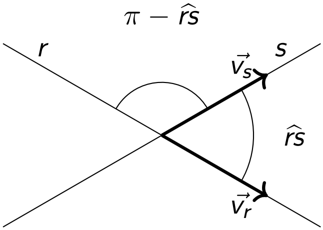
Angoli

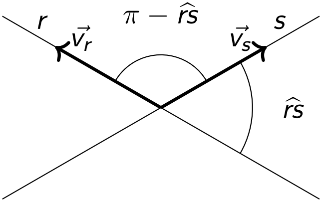
Due rette r e s individuano 4 angoli che sono a due a due uguali e a due a due supplementari; noto, quindi, uno degli angoli sono noti gli altri tre: è, perciò, lecito parlare di "angolo" $\widehat{rs}$ individuato da due rette r e s. Per convenzione l'angolo individuato da due rette non perpendicolari tra loro è acuto.



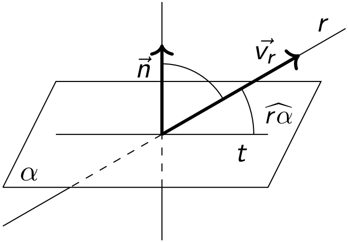
Per calcolare questo angolo, si individuano due vettori direttivi $\vec{v_r}$ e $\vec{v_s}$ e l'angolo individuato dai due coincide con l'angolo individuato da r e s oppure con il supplementare, per cui abbiamo la formula:

$$\cos \widehat{rs} = \left| \frac{\vec{v_r} \cdot \vec{v_s}}{|\vec{v_r}| \cdot |\vec{v_s}|} \right| .$$


$\pi - \widehat{rs}$
r
s
$\vec{v_s}$
$\widehat{rs}$
$\vec{v_r}$


r
$\vec{v_r}$
$\pi - \widehat{rs}$
$\vec{v_s}$
s
$\widehat{rs}$

Si definisce angolo tra una retta r e un piano α l'angolo acuto individuato dalla retta r e dalla sua proiezione ortogonale t sul piano α. Tale angolo è il complementare dell'angolo acuto individuato dalla retta r e da una retta ortogonale al piano α.



Quindi:

$$\text{sen}(\widehat{r\alpha}) = \pm\cos(\widehat{\vec{v}\vec{n}})$$

per cui possiamo dire che:

$$\text{sen}(\widehat{r\alpha}) = \left|\frac{\vec{n}\cdot\vec{v}}{|\vec{n}|\cdot|\vec{v}|}\right|.$$

Due piani nello spazio formano individuano 4 angoli a due a due uguali e a due a due supplementari. Come avviene per le rette, noto uno degli angoli sono noti gli altri tre: perciò, è lecito parlare di "angolo" $\widehat{\pi_1\pi_2}$ individuato da due piani π_1 e π_2. Per determinare tale angolo, è sufficiente calcolare l'angolo individuato da due vettori $\vec{n_1}$ e $\vec{n_2}$ ortogonali ai piani:

$$\cos\widehat{\pi_1\pi_2} = \left|\frac{\vec{n_1}\cdot\vec{n_2}}{|\vec{n_1}|\cdot|\vec{n_2}|}\right|.$$

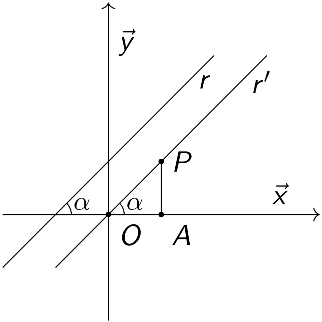
Fare esercizi 1.34, 1.35 e 1.36 dal libro di esercizi.

Siano $r\colon ax+by+c=0$ e $r'\colon a'x+b'y+c'=0$ due rette distinte nel piano e siano α e β gli angoli formati dalle due rette. Allora:

$$\cos\alpha = \left|\frac{\vec{n}\cdot\vec{n'}}{|\vec{n}|\cdot|\vec{n'}|}\right| = \left|\frac{aa'+bb'}{\sqrt{a^2+b^2}\sqrt{{a'}^2+{b'}^2}}\right|,$$

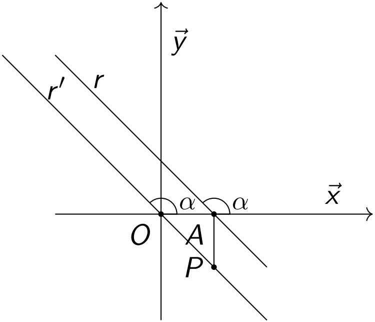
dove $\vec{n} = a\vec{i}+b\vec{j}\perp r$ e $\vec{n'} = a'\vec{i}+b'\vec{j}\perp r'$.

Sia $r\colon ax + by + c = 0$ una retta propria nel piano. Se $a = 0$, allora $r\colon y = -\frac{c}{b}$ ed è parallela all'asse $\vec{x}$. Se $b = 0$, allora $r\colon x = -\frac{c}{a}$ ed è parallela all'asse $\vec{y}$. Se $a, b \neq 0$, allora r non è parallela a nessuno dei due assi. Sia $-\frac{a}{b} > 0$.



Sia $r'\colon ax + by = 0$ la retta passante per $O = (0, 0)$ e parallela a r. Siano $A = (1, 0)$ e $P = (1, -\frac{a}{b}) \in r'$. Il triangolo OAP è rettangolo e $\overline{AP} = \overline{OA} \tan\alpha$, cioè $\tan\alpha = -\frac{a}{b}$.

Sia $-\frac{a}{b} < 0$.



Sia r': $ax + by = 0$ la retta passante per $O = (0,0)$ e parallela a r. Siano $A = (1,0)$ e $P = (1, -\frac{a}{b}) \in r'$. Il triangolo OAP è rettangolo e:

$$\overline{AP} = \overline{OA} \tan(\pi - \alpha) \Rightarrow \tan(\pi - \alpha) = \frac{a}{b} \Rightarrow \tan \alpha = -\frac{a}{b}$$

$m = -\frac{a}{b}$ si chiama coefficiente angolare.

Se $r \parallel \vec{x}$, allora $a = 0$ e $m = 0$. Per le rette parallele all'asse $\vec{y}$ non si definisce il coefficiente angolare.

Osservazione

Se $P_1 = (x_1, y_1)$ e $P_2 = (x_2, y_2)$, allora la retta congiungente i due punti ha equazione:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}$$

e coefficiente angolare:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

Proposizione

Condizione necessaria e sufficiente perché due rette siano parallele è che abbiano lo stesso coefficiente angolare. Condizione necessaria e sufficiente perché due rette di coefficienti angolari m e m' siano perpendicolari è che $mm' = -1$.

Osservazione

Se $ax + by + c = 0$ è l'equazione di una retta r e $ax' + by' + ct' = 0$ è la sua forma omogenea, allora il punto improprio ha coordinate $(b, -a, 0)$. Se $b \neq 0$, allora si può dire che ha coordinate $(1, -\frac{a}{b}, 0)$. Quindi, il coefficiente angolare si deduce dal punto improprio della retta r.

Fare esercizi 1.65 e 1.66 dal libro di esercizi.

Osservazione

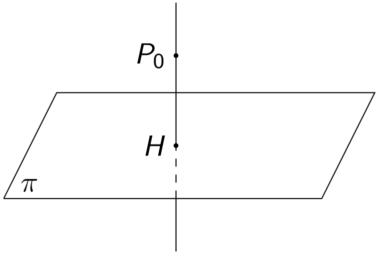
Siano $P_1 = (x_1, y_1, z_1)$ e $P_2 = (x_2, y_2, z_2)$. Allora:

$$\overline{P_1 P_2} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

Se $P_1 = (x_1, y_1)$ e $P_2 = (x_2, y_2)$, allora:

$$\overline{P_1 P_2} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

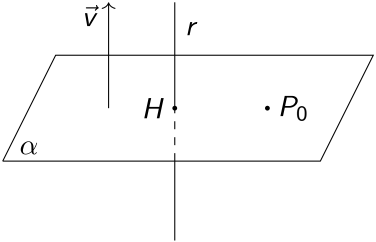
Sia $\pi\colon ax + by + cz + d = 0$ un piano e sia $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ un punto. Allora $d(P_0, \pi)$ è la distanza del punto P_0 dal piano π ed è la distanza del punto P_0 dalla sua proiezione ortogonale H sul piano π:



Dunque, $d(P_0, \pi) = \overline{P_0 H}$ e vale la formula:

$$d(P_0, \pi) = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

Sia $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ un punto e sia r una retta. La distanza di P_0 da r è la distanza di P_0 dalla sua proiezione ortogonale H sulla retta r:

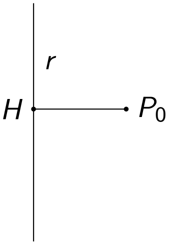


α è il piano passante per P_0 e ortogonale a r e $H = \alpha \cap r$. Dunque, $d(P_0, r) = \overline{P_0 H}$. Se $P_1 \in r$ è un punto qualsiasi, allora:

$$d(P_0, r) = \left| \overrightarrow{P_0 P_1} \wedge \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} \right|,$$

dove $\vec{v} \parallel r$.

Sia $r\colon ax + by + c = 0$ e sia $P_0 = (x_0, y_0)$. La distanza di P_0 dalla retta r è la distanza di P_0 dalla sua proiezione ortogonale H sulla retta r, cioè $d(P_0, r) = \overline{P_0 H}$:



Si vede che:

$$d(P_0, r) = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Fare esercizi da 1.37 a 1.59 e 1.67 e 1.68 dal libro di esercizi ed esercizi da "Competenze minime UDE5" e "Tutte le competenze UDE5", reperibili su studium.