Fissiamo nel piano un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $O, \vec{x}, \vec{y}, u$.

Definizione

Una conica è il luogo dei punti, propri o impropri, reali o immaginari, che con le loro coordinate omogenee (x', y', t') soddisfano un'equazione di secondo grado omogenea nelle variabili x', y', t':

$$a_{11}{x'}^2 + 2a_{12}x'y' + a_{22}{y'}^2 + 2a_{13}x't' + 2a_{23}y't' + a_{33}{t'}^2 = 0.$$

Per considerare i punti propri della conica teniamo conto del fatto che $x = \frac{x'}{t'}$ e $y = \frac{y'}{t'}$. Allora, dividendo per ${t'}^2$:

$$a_{11}\frac{{x'}^2}{{t'}^2} + 2a_{12}\frac{x'}{t'}\frac{y'}{t'} + a_{22}\frac{{y'}^2}{{t'}^2} + 2a_{13}\frac{x'}{t'} + 2a_{23}\frac{y'}{t'} + a_{33} = 0$$

$$\Rightarrow a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0.$$

Questa è l'equazione della conica in forma non omogenea.

Ad ogni conica associamo la matrice simmetrica:

$$B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

Se poniamo:

$$\underline{x'} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ t' \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \underline{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix},$$

allora l'equazione della conica può essere scritta in forma compatta. La forma omogenea può essere scritta in questo modo:

$$^{\mathrm{t}}\underline{x}'B\underline{x}' = 0,$$

mentre quella non omogenea in quest'altro:

$$^{\mathrm{t}}\underline{x}B\underline{x} = 0.$$

Definizione

Se il polinomio $a_{11}{x'}^2 + 2a_{12}x'y' + a_{22}{y'}^2 + 2a_{13}x't' + 2a_{23}y't' + a_{33}{t'}^2$ si spezza nel prodotto di due fattori lineari, distinti o meno, la conica si dice riducibile o spezzata ed i suoi punti sono quelli delle due rette di cui è unione. Se una conica non è riducibile, si dice che è irriducibile.

Sia Γ la conica di equazione:

$$a_{11}{x'}^2 + 2a_{12}x'y' + a_{22}{y'}^2 + 2a_{13}x't' + 2a_{23}y't' + a_{33}{t'}^2 = 0.$$

I suoi punti impropri sono determinati dal sistema:

$$\begin{cases} a_{11}{x'}^2 + 2a_{12}x'y' + a_{22}{y'}^2 + 2a_{13}x't' + 2a_{23}y't' + a_{33}{t'}^2 = 0 \\ t' = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a_{11}{x'}^2 + 2a_{12}x'y' + a_{22}{y'}^2 = 0 \\ t' = 0. \end{cases}$$

Se $a_{11} = a_{12} = a_{22} = 0$, allora la conica è riducibile e contiene la retta impropria $t' = 0$. Supponiamo $a_{11} \neq 0$. Dividiamo l'equazione per ${y'}^2$:

$$\begin{cases} a_{11}\left(\dfrac{x'}{y'}\right)^2 + 2a_{12}\dfrac{x'}{y'} + a_{22} = 0 \\ t' = 0. \end{cases}$$

In questo caso otteniamo i punti impropri $(-a_{12} + \sqrt{a_{12}^2 - a_{11}a_{22}}, a_{11}, 0)$ e $(-a_{12} - \sqrt{a_{12}^2 - a_{11}a_{22}}, a_{11}, 0)$.

Se $a_{11} = 0$, abbiamo:

$$\begin{cases} 2a_{12}x'y' + a_{22}{y'}^2 = 0 \\ t' = 0. \end{cases}$$

e otteniamo i punti impropri $(1, 0, 0)$ e $(a_{22}, -2a_{12}, 0)$.

In ogni caso, si ottiene che i punti impropri di una conica che non contiene la retta impropria sono sempre 2 e sono:

- reali e distinti se $a_{12}^2 - a_{11}a_{22} > 0$
- reali e coincidenti se $a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = 0$
- immaginari e coniugati se $a_{12}^2 - a_{11}a_{22} < 0$.

Definizione

Una conica irriducibile si dice:

- iperbole, se ha due punti impropri reali e distinti
- parabola, se ha due punti impropri reali e coincidenti
- ellisse, se ha due punti impropri immaginari e coniugati.

Osservazione

Consideriamo la matrice:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}.$$

Allora $|A| = a_{11}a_{22} - {a_{12}}^2 = -(a_{12}^2 - a_{11}a_{22})$. Dunque, possiamo dire che una conica irriducibile è:

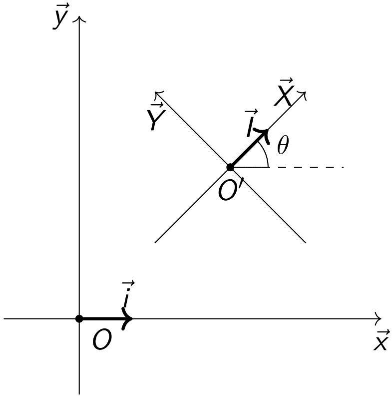
- un'iperbole se $|A| < 0$
- una parabola se $|A| = 0$
- un'ellisse se $|A| > 0$.

Fare esercizi da 2.1 a 2.3 dal libro di esercizi.

Fissiamo nel piano due sistemi di riferimento $O, \vec{x}, \vec{y}, u$ e $O', \vec{X}, \vec{Y}, u$. Sia $P = (x, y)$ un punto del piano. Se vogliamo passare da $O', \vec{X}, \vec{Y}$ a $O, \vec{x}, \vec{y}$ occorre effettuare una rototraslazione, cioè una composizione tra una rotazione e una traslazione:

$$\begin{cases} x = X\cos\theta - Y\operatorname{sen}\theta + a \\ y = X\operatorname{sen}\theta + Y\cos\theta + b, \end{cases}$$

dove $O' = (a, b)$ in $O, \vec{x}, \vec{y}$ e θ è l'angolo formato da $\vec{i}$ e $\vec{I}$.



Se:

$$\underline{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \underline{X} = \begin{pmatrix} X \\ Y \\ 1 \end{pmatrix},$$

allora le equazioni del cambiamento di coordinate si possono scrivere nella forma:

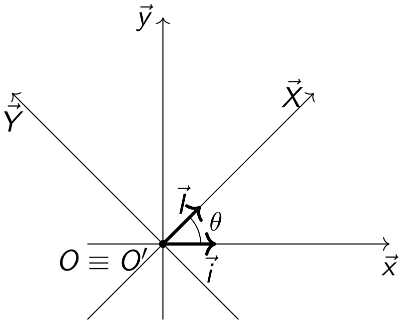
$$\underline{x} = Q\underline{X},$$

con:

$$Q = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta & a \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

matrice della rototraslazione.

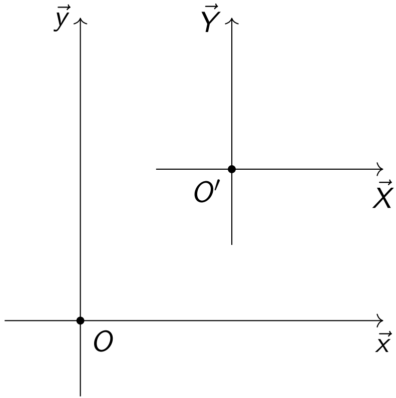
Se $a = b = 0$, allora abbiamo una rotazione.



Le equazioni di una rotazione sono:

$$\begin{cases} x = X\cos\theta - Y\,\mathrm{sen}\,\theta \\ y = X\,\mathrm{sen}\,\theta + Y\cos\theta. \end{cases}$$

Se $\theta = 0$, allora abbiamo una traslazione.



Le equazioni di una traslazione sono:

$$\begin{cases} x = X + a \\ y = Y + b. \end{cases}$$

Teorema

Data una conica Γ *a coefficienti reali di equazione* ${}^t\underline{x}B\underline{x} = 0$, *è sempre possibile effettuare una rototraslazione, di matrice* Q, *tale che* Γ *nel nuovo riferimento* $O', \vec{X}, \vec{Y}, u$ *abbia una delle due forme:*

I) $\alpha X^2 + \beta Y^2 = \gamma$

II) $\beta Y^2 = 2\gamma X$.

Inoltre, dette B *e* A *la matrice della conica e la sottomatrice dei termini di secondo grado in* x *e* y, *rispettivamente, e* B' *e* A' *le corrispondenti matrici per la conica in forma canonica, si ha:*

a) B *e* B' *hanno lo stesso determinante e lo stesso rango*

b) A *e* A' *sono simili, e, quindi, hanno lo stesso polinomio caratteristico, stesso determinante e stessa traccia.*

Osservazione

Se:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix},$$

allora $\mathrm{Tr}(A) = a_{11} + a_{22}$ è la traccia di A.

Definizione

I numeri $\det(B), \det(A), \rho(B), \mathrm{Tr}(A)$ si dicono invarianti ortogonali, in quanto si mantengono inalterati dopo una rototraslazione.

Teorema

Sia data una conica Γ *di equazione* ${}^t\underline{x}B\underline{x} = 0$*. Allora:*

1. Γ *è spezzata in due rette coincidenti* $\iff \rho(B) = 1$
2. Γ *è spezzata in due rette distinte* $\iff \rho(B) = 2$
3. Γ *è irriducibile* $\iff \rho(B) = 3$.

Studio dell'ellisse in forma canonica

L'equazione canonica dell'ellisse reale è del tipo:

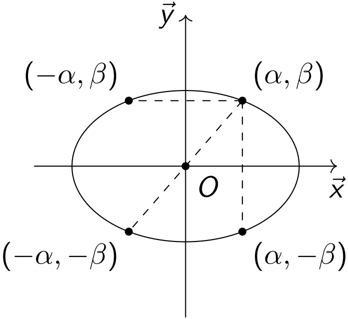
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Essa rientra tra le coniche del tipo I $\alpha x^2 + \beta y^2 = \gamma$, con $\frac{\alpha}{\gamma} = \frac{1}{a^2}$ e $\frac{\beta}{\gamma} = \frac{1}{b^2}$.
L'equazione canonica dell'ellisse immaginaria è:

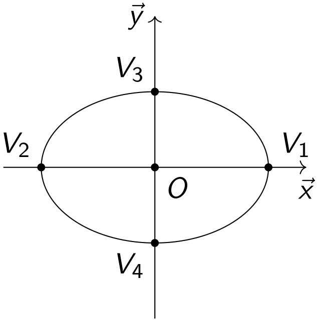
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -1.$$

Notiamo che per l'ellisse reale $\mathrm{Tr}(A) \cdot |B| < 0$, mentre per l'ellisse immaginaria $\mathrm{Tr}(A) \cdot |B| > 0$.

1. L'origine $O = (0,0)$ è il centro di simmetria, perché se $(\alpha, \beta) \in \Gamma \implies (-\alpha, -\beta) \in \Gamma$.
2. L'asse $\vec{x}$ è asse di simmetria, perché se $(\alpha, \beta) \in \Gamma \implies (\alpha, -\beta) \in \Gamma$.
3. L'asse $\vec{y}$ è asse di simmetria, perché se $(\alpha, \beta) \in \Gamma \implies (-\alpha, \beta) \in \Gamma$.



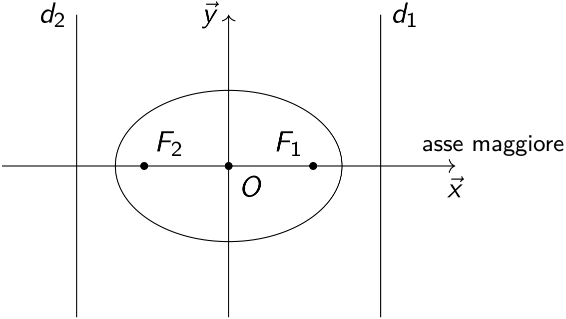
I vertici dell'ellisse sono i punti che l'ellisse ha in comune con i suoi assi di simmetria. Essi sono $V_1 = (a, 0)$, $V_2 = (-a, 0)$, $V_3 = (0, b)$ e $V_4 = (0, -b)$.



Sia $a > b$. In tal caso, consideriamo i punti $F_1 = (c, 0)$ e $F_2 = (-c, 0)$, con $c = \sqrt{a^2 - b^2}$. F_1 e F_2 sono detti fuochi dell'ellisse. Si dimostra che l'ellisse si può ottenere come il luogo dei punti $P = (x, y)$ del piano tali che:

$$\overline{PF_1} + \overline{PF_2} = 2a.$$

Le rette $d_1 \colon x = \frac{a^2}{c}$ e $d_2 \colon x = -\frac{a^2}{c}$ sono dette direttrici relative ai fuochi F_1 e F_2. Sull'asse maggiore vi sono i due fuochi.



Proposizione

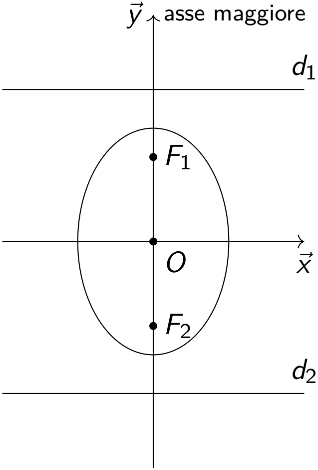
I rapporti:

$$\frac{\overline{PF_1}}{d(P, d_1)} \quad e \quad \frac{\overline{PF_2}}{d(P, d_2)}$$

sono, al variare di P sull'ellisse Γ, costanti e uguali a una costante $e = \frac{c}{a}$, detta eccentricità *dell'ellisse. Inoltre si prova che $e < 1$, cioè:*

$$\frac{\overline{PF_1}}{d(P, d_1)} = \frac{\overline{PF_2}}{d(P, d_2)} = e = \frac{c}{a} < 1 \quad \forall P \in \Gamma.$$

Se $b > a$, tutto si ripete in maniera analoga, solo che $c = \sqrt{b^2 - a^2}$, $F_1 = (0, c)$ e $F_2 = (0, -c)$. Le direttrici sono le rette $d_1 \colon y = \dfrac{b^2}{c}$ e $d_2 \colon y = -\dfrac{b^2}{c}$. Inoltre, l'ellisse è il luogo dei punti del piano tali che $\overline{PF_1} + \overline{PF_2} = 2b$.



Fare esercizi 2.9, 2.11 e 2.13 dal libro di esercizi.

Studio dell'iperbole in forma canonica

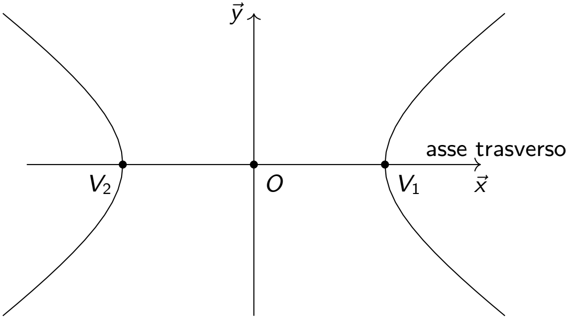
L'equazione canonica dell'iperbole è del tipo:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

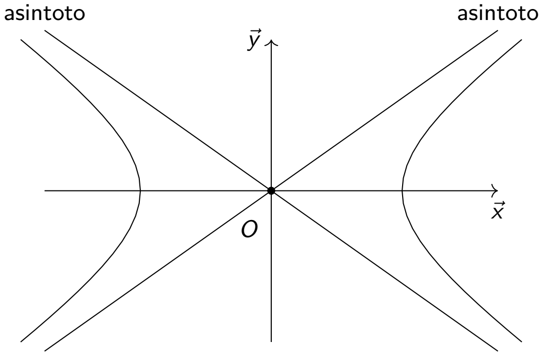
Essa rientra tra le coniche del tipo I $\alpha x^2 + \beta y^2 = \gamma$, con $\frac{\alpha}{\gamma} = \frac{1}{a^2}$ e $\frac{\beta}{\gamma} = -\frac{1}{b^2}$.

1. L'origine $O = (0,0)$ è il centro di simmetria, perché se $(\alpha, \beta) \in \Gamma \Longrightarrow (-\alpha, -\beta) \in \Gamma$.
2. L'asse $\vec{x}$ è asse di simmetria, perché se $(\alpha, \beta) \in \Gamma \Longrightarrow (\alpha, -\beta) \in \Gamma$.
3. L'asse $\vec{y}$ è asse di simmetria, perché se $(\alpha, \beta) \in \Gamma \Longrightarrow (-\alpha, \beta) \in \Gamma$.

L'asse $\vec{x}$ è l'unico dei due assi di simmetria che incontra l'iperbole in due punti reali, $V_1 = (a, 0)$ e $V_2 = (-a, 0)$. Sono i due vertici dell'iperbole e l'asse $\vec{x}$ è detto asse trasverso.



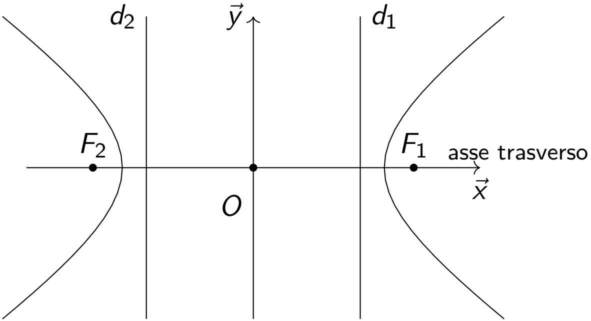
I punti impropri dell'iperbole sono $(1, \frac{b}{a}, 0)$ e $(1, -\frac{b}{a}, 0)$. Le rette che congiungono l'origine con questi punti, cioè le rette $y = \frac{b}{a}x$ e $y = -\frac{b}{a}x$, cioè le due rette che congiungono il centro di simmetria con i punti impropri, sono dette asintoti dell'iperbole e sono tangenti all'iperbole nei punti impropri. Inoltre, gli assi di simmetria sono le bisettrici degli asintoti.



Sia $c = \sqrt{a^2 + b^2}$. I punti $F_1 = (c, 0)$ e $F_2 = (-c, 0)$ sono detti fuochi dell'iperbole. Si dimostra che l'iperbole si può ottenere come il luogo dei punti $P = (x, y)$ del piano tali che:

$$|\overline{PF_1} - \overline{PF_2}| = 2a.$$

Le rette $d_1 \colon x = \frac{a^2}{c}$ e $d_2 \colon x = -\frac{a^2}{c}$ sono dette direttrici relative ai fuochi F_1 e F_2. Essi si trovano sull'asse trasverso.



Proposizione

I rapporti:

$$\frac{\overline{PF_1}}{d(P, d_1)} \quad e \quad \frac{\overline{PF_2}}{d(P, d_2)}$$

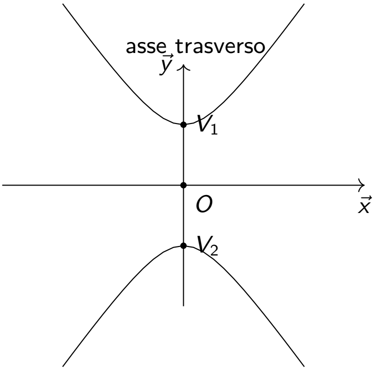
sono, al variare di P sull'iperbole Γ, costanti e uguali a una costante $e = \frac{c}{a}$, detta eccentricità dell'iperbole. Inoltre si prova che $e > 1$, cioè:

$$\frac{\overline{PF_1}}{d(P, d_1)} = \frac{\overline{PF_2}}{d(P, d_2)} = e = \frac{c}{a} > 1 \quad \forall P \in \Gamma.$$

Se l'equazione dell'iperbole è:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1,$$

allora i vertici sono i punti $V_1 = (0, b)$ e $V_2 = (0, -b)$, l'asse $\vec{y}$ è l'asse trasverso, gli asintoti sono sempre le rette $y = \frac{b}{a}x$ e $y = -\frac{b}{a}x$, $c = \sqrt{a^2 + b^2}$, i fuochi sono $F_1 = (0, c)$ e $F_2 = (0, -c)$, le direttrici sono $d_1\colon\ y = \frac{b^2}{c}$ e $d_2\colon\ y = -\frac{b^2}{c}$ e l'eccentricità è $e = \frac{c}{b}$. Inoltre, l'iperbole è in tal caso il luogo dei punti P del piano tali che:



$$|\overline{PF_1} - \overline{PF_2}| = 2b.$$

Definizione

Un conica irriducibile si dice che è un'iperbole equilatera se ha i punti impropri che individuano direzioni ortogonali.

Proposizione

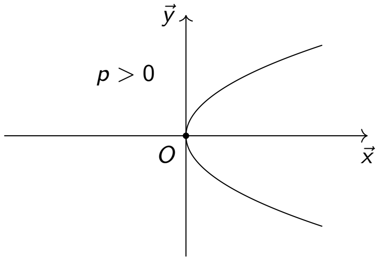
La condizione $\mathrm{Tr}(A) = 0$ *caratterizza le coniche contenenti come parte la retta impropria oppure che hanno due punti impropri reali e in direzioni ortogonali. In particolare, le coniche irriducibili tali che* $\mathrm{Tr}(A) = 0$ *sono tutte e sole iperboli equilatere.*

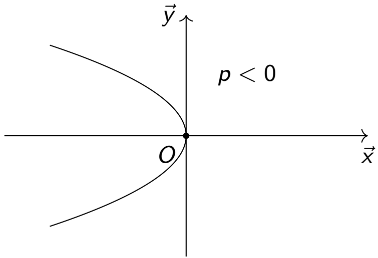
Fare esercizi 2.8, 2.12 e 2.14 dal libro di esercizi.

Studio della parabola in forma canonica

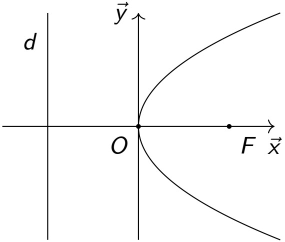
L'equazione della parabola in forma canonica è $y^2 = 2px$. È una conica del tipo II $\beta y^2 = 2\gamma x$, con $p = \frac{\gamma}{\beta}$.

1. La parabola non ha centro di simmetria.
2. L'asse $\vec{x}$ è asse di simmetria, perché se $(\alpha, \beta) \in \Gamma \Longrightarrow (\alpha, -\beta) \in \Gamma$.
3. L'asse $\vec{y}$ è tangente alla parabola nell'origine $O = (0, 0)$.
4. L'asse $\vec{x}$ incontra la parabola in $O = (0, 0)$ e nel suo punto improprio.
5. Il punto $O = (0, 0)$ è detto vertice e la retta passante per il vertice della parabola e ortogonale all'asse di simmetria è tangente alla parabola nel vertice.





Il punto $F = (\frac{p}{2}, 0)$ è il fuoco della parabola e la retta $d\colon x = -\dfrac{p}{2}$ è la direttrice.



L'equazione della parabola $y^2 = 2px$ si ottiene come il luogo dei punti $P = (x, y)$ del piano tali che $\overline{PF} = d(P, d)$.

Proposizione

Il rapporto $e = \frac{\overline{PF}}{d(P,d)}$ è costante per ogni punto P della parabola Γ e si chiama eccentricità, cioè:

$$e = \frac{\overline{PF}}{d(P, d)} = 1 \quad \forall P \in \Gamma.$$

Fare esercizi 2.10 e 2.15 dal libro di esercizi.

Circonferenze

Una circonferenza è il luogo dei punti $P = (x, y)$ del piano che distano $r > 0$ da un punto (α, β):

$$(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = r^2.$$

r è il raggio e $C = (\alpha, \beta)$ è il centro della circonferenza, che ha equazione:

$$x^2 + y^2 - 2\alpha x - 2\beta y + \alpha^2 + \beta^2 - \gamma^2 = 0.$$

Le circonferenze, allora, sono coniche tali che $a_{11} = a_{22} \neq 0$ e $a_{12} = 0$. Inoltre, se $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ è una circonferenza, allora $C = (-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2})$ e $r = \sqrt{\frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4} - c}$.

- Se $\frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4} - c > 0$, la circonferenza è reale.
- Se $\frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4} - c = 0$, la conica è spezzata in due rette immaginarie e coniugate aventi in comune il punto $(-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2})$ e la chiamiamo circonferenza di raggio nullo.
- Se $\frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4} - c < 0$, la conica è irriducibile, ma è priva di punti reali: diremo che abbiamo una circonferenza immaginaria.

Le circonferenze hanno gli stessi punti impropri, $(1, i, 0)$ e $(1, -i, 0)$, che vengono detti punti ciclici del piano.
Fare esercizi da 2.4 a 2.7.

Proposizione

Se una conica passa per i punti ciclici del piano, allora o contiene come parte la retta impropria oppure è una circonferenza.

Riepilogando:

- se $\rho(B) = 1$, abbiamo una conica spezzata in due rette coincidenti;
- se $\rho(B) = 2$, abbiamo una conica spezzata in due rette distinte;
- se $\rho(B) = 3$, cioè se $|B| \neq 0$, abbiamo una conica irriducibile. In tal caso:
  - se $|A| > 0$, abbiamo un'ellisse; essa sarà reale se $\mathrm{Tr}(A) \cdot |B| < 0$, immaginaria se $\mathrm{Tr}(A) \cdot |B| > 0$; se, inoltre, $a_{11} = a_{22} \neq 0$ e $a_{12} = 0$, abbiamo una circonferenza;
  - se $|A| = 0$, abbiamo una parabola;
  - se $|A| < 0$, abbiamo un'iperbole; se, inoltre, $\mathrm{Tr}(A) = 0$, abbiamo un'iperbole equilatera.

Centro e assi di simmetria

Sia Γ una conica e supponiamo che sia un'ellisse o un'iperbole. Si può dimostrare che, se $C = (a, b)$ è il centro di simmetria della conica, allora le sue coordinate verificano le condizioni:

$$\begin{cases} a_{11} a + a_{12} b + a_{13} = 0 \\ a_{12} a + a_{22} b + a_{23} = 0, \end{cases}$$

cioè sono soluzioni del seguente sistema associato alle prime due righe della matrice B:

$$\begin{cases} a_{11} x + a_{12} y + a_{13} = 0 \\ a_{12} x + a_{22} y + a_{23} = 0. \end{cases}$$

Inoltre, gli assi di simmetria sono le rette parallele agli autospazi associati alla matrice A e passano per il centro di simmetria C.

Nel caso della parabola, gli autovalori della matrice A sono 0 e β, in quanto $|A| = 0$. In questo caso, si prova che l'autospazio associato all'autovalore 0 è una retta parallela all'asse di simmetria.

Osservazione

- Per un'iperbole o un'ellisse avente $a_{12} = 0$, gli assi di simmetria sono paralleli agli assi cartesiani e, ovviamente, passano per il centro di simmetria.
- Una parabola di equazione $y = ax^2 + bx + c$ ha vertice $V = (-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a})$, fuoco $F = (-\frac{b}{2a}, \frac{1-\Delta}{4a})$, direttrice $y = -\frac{1+\Delta}{4a}$ e asse di simmetria $x = -\frac{b}{2a}$, dove $\Delta = b^2 - 4ac$.
- Una parabola di equazione $x = ay^2 + by + c$ ha vertice $V = (-\frac{\Delta}{4a}, -\frac{b}{2a})$, fuoco $F = (\frac{1-\Delta}{4a}, -\frac{b}{2a})$, direttrice $x = -\frac{1+\Delta}{4a}$ e asse di simmetria $y = -\frac{b}{2a}$, dove $\Delta = b^2 - 4ac$.

Tangenza

Definizione

Data una conica Γ, diremo che una retta r è tangente a Γ in un suo punto P_0 se essa incontra Γ in due punti coincidenti in P_0.

Teorema

Data una conica Γ irriducibile di equazione ${}^t\underline{x}B\underline{x} = 0$, sia P_0 un suo punto di coordinate $\underline{x}_0$. Allora esiste la tangente a Γ in P_0 e la sua equazione è ${}^t\underline{x}_0 B\underline{x} = 0$.

Definizione

Chiamiamo curva algebrica C di ordine n il luogo dei punti propri o impropri, reali o immaginari, che con le loro coordinate omogenee soddisfano un polinomio omogeneo $F(x', y', t') = 0$ di grado n nelle variabili x', y', t'.

Osservazione

Se $F = {F_1}^{n_1} {F_2}^{n_2} \dots {F_k}^{n_k}$, con $F_1, F_2, \dots, F_k$ irriducibili, allora la curva C è costituita dai punti di $F_1 = 0$ contati n_1 volte, dai punti $F_2 = 0$ contati n_2 volte, ..., dai punti di $F_k = 0$, contati n_k volte. $F_1 = 0$, $F_2 = 0$,. . . , $F_k = 0$ sono le componenti irriducibili della curva di equazione $F = 0$.

Teorema (Teorema di Bezout)

Due curve algebriche C_1 e C_2 di ordini m e n si incontrano in $m \cdot n$ punti oppure hanno una componente in comune.

Osservazione

Due coniche hanno in comune 4 punti oppure hanno in comune una retta.

Teorema

Dati 5 *punti distinti nel piano, per questi punti passa una sola conica o ne passano infinite. Se ne passano infinite, almeno* 4 *dei* 5 *punti sono allineati.*

DIMOSTRAZIONE.

Fasci di coniche

Definizione

Date due coniche $\Gamma_1 \colon f_1 = 0$ e $\Gamma_2 \colon f_2 = 0$, chiamiamo fascio di coniche individuato da Γ_1 e Γ_2 la totalità delle coniche la cui equazione si ottiene dalla combinazione lineare $\lambda f_1 + \mu f_2 = 0$, al variare di λ e μ non entrambi nulli.

Osservazione

Per determinare una conica del fascio è sufficiente determinare $\frac{\lambda}{\mu}$ oppure $\frac{\mu}{\lambda}$.

Definizione

Un punto $P \in \Gamma_1 \cap \Gamma_2$ è detto punto base del fascio.

Osservazione

Tutte le coniche del fascio passano per i punti base. Per un punto P_0 non base del fascio passa una sola conica del fascio.

Proposizione

In un fascio di coniche $\lambda f_1 + \mu f_2 = 0$ *ci sono* 3 *coniche spezzate oppure tutte le coniche del fascio sono spezzate.*

DIMOSTRAZIONE.

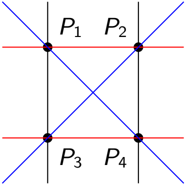
Teorema

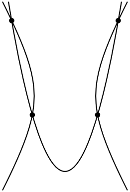
Un fascio di coniche è individuato da due sue coniche qualsiasi.

Coniche spezzate di un fascio

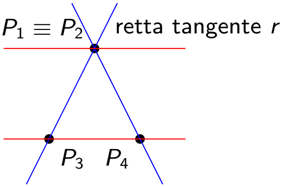
Se un fascio di coniche è individuato da due coniche prive di rette in comune, i punti base del fascio sono 4, più o meno coincidenti, e le coniche spezzate appartenenti al fascio sono 3, più o meno coincidenti.

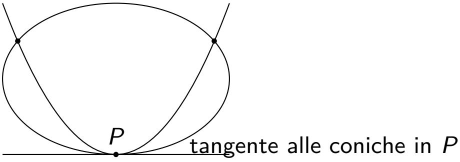
1. Punti base tutti distinti tra loro. In tal caso, le coniche spezzate distinte sono 3 e sono $P_1P_2 \cup P_3P_4$, $P_1P_3 \cup P_2P_4$ e $P_1P_4 \cup P_2P_3$:



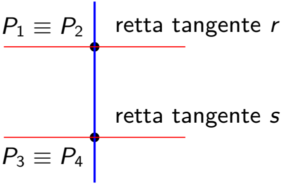


2. Tangenza: 2 dei 4 punti coincidenti tra loro. In questo caso le coniche del fascio hanno tutte la stessa retta tangente r in un punto $P_1 \equiv P_2$. Le coniche spezzate del fascio sono $r \cup P_3P_4$ e $P_1P_3 \cup P_1P_4$, contata due volte nel computo delle coniche spezzate del fascio.

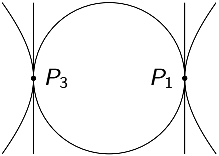




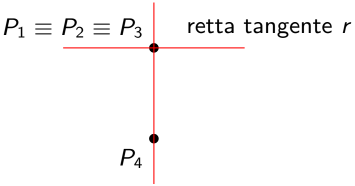
3. Bitangenza: i 4 punti coincidono a due a due. In tal caso, le coniche del fascio hanno tutte la stessa retta tangente r in $P_1 \equiv P_2$ e la stessa retta tangente s in $P_3 \equiv P_4$. Le coniche spezzate del fascio sono $r \cup s$ e la conica spezzata in due rette coincidenti con P_1P_3 (tale conica è contata due volte nel computo delle coniche spezzate.)

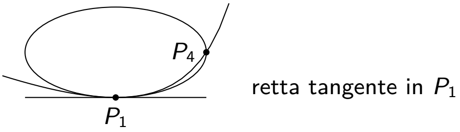


rette tangenti alle due coniche in P_1 e P_3

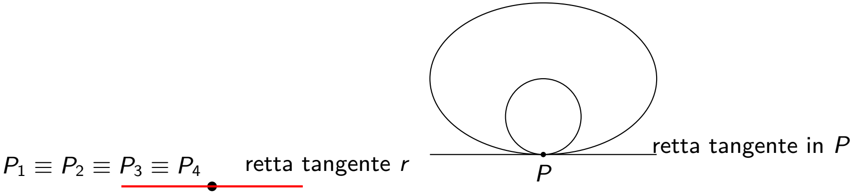


4. Coniche che si osculano: 3 dei 4 punti coincidono. In tal caso le coniche hanno tutte la stessa retta tangente r in $P_1 \equiv P_2 \equiv P_3$. L'unica conica spezzata del fascio è $r \cup P_1 P_4$, contata 3 volte nel computo delle coniche spezzate:





5. Coniche che si iperosculano: i 4 punti sono tutti coincidenti. In tal caso le coniche hanno tutte la stessa retta tangente r in $P_1 \equiv P_2 \equiv P_3 \equiv P_4$. L'unica conica spezzata del fascio è quella spezzata in due rette coincidenti con r e tale conica è contata tre volte nel computo delle coniche spezzate:



Fare esercizi da 2.16 a 2.51 dal libro ed esercizi da "Competenze minime UDE6" e "Tutte le competenze UDE6", reperibili su studium.