Calcolo vettoriale

Ci poniamo nello spazio ordinario S, in cui valgono gli assiomi della geometria euclidea. I vettori vengono rappresentati mediante frecce, con un punto iniziale e un punto finale. Si usa la notazione $\overrightarrow{AB}$, dove A è il punto iniziale o punto di applicazione e B è il punto finale. $\overrightarrow{AB}$ è anche detto vettore applicato in A. Il modulo del vettore $\overrightarrow{AB}$ è la lunghezza $\overline{AB}$.

Definizione

Diciamo equivalenti due vettori paralleli, aventi stesso modulo e stesso verso.

In questo modo, l'insieme dei vettori applicati dello spazio S viene ripartito in tante classi, in ognuna delle quali vi sono i vettori applicati paralleli, con stesso modulo e verso. Ognuna di queste classi è detta vettore libero.

Se $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$ è un vettore libero, allora scriviamo anche $\vec{v} = B - A$. Se $\overrightarrow{CD}$ è un altro vettore applicato equivalente a $\overrightarrow{AB}$, si può anche scrivere $\vec{v} = D - C$.

Il modulo di $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$ è $|v| = \overline{AB}$. Il vettore libero $A - A = \vec{0}$ è il vettore nullo. Ha modulo 0, ma direzione e verso sono indeterminati. È l'unico vettore ad avere modulo 0.

Se fissiamo un qualunque punto O dello spazio, per ogni vettore libero $\vec{v}$ esiste uno ed un solo rappresentante di $\vec{v}$ applicato in O.

Operazioni sui vettori

Definizione
Siano $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$ e $\vec{w} = \overrightarrow{BC}$ due vettori liberi. La somma dei vettori è:

$$\vec{v} + \vec{w} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}.$$

Si può anche scrivere:

$$\vec{v} + \vec{w} = (B - A) + (C - B) = C - A.$$

Dati tre vettori liberi $\vec{v}$, $\vec{w}$, $\vec{z}$, si ha:

$$\vec{v} + \vec{w} = \vec{w} + \vec{v},$$

cioè vale la proprietà commutativa. Inoltre, $\vec{0}$ è l'elemento neutro della somma e ogni vettore $\vec{v}$ ammette l'opposto $-\vec{v}$.

Vale la proprietà associativa:

$$(\vec{v} + \vec{w}) + \vec{z} = \vec{v} + (\vec{w} + \vec{z})$$

Infatti:

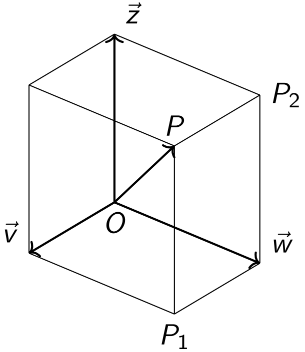


Figura: $(\vec{v} + \vec{w}) + \vec{z} = \vec{v} + (\vec{w} + \vec{z}) = \overrightarrow{OP}$

Siano $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$ un vettore libero e $a \in \mathbb{R}$. Vogliamo definire il prodotto $a\vec{v}$, che sarà un vettore.

Definizione

Il vettore $a\vec{v}$ ha modulo $|a| \cdot |\vec{v}|$. Se questo numero è 0, allora $a\vec{v} = \vec{0}$. Altrimenti, $a\vec{v}$ è il vettore libero rappresentato dai vettori applicati paralleli al vettore applicato $\overrightarrow{AB}$ e verso concorde con quello di $\overrightarrow{AB}$ per $a > 0$, opposto per $a < 0$.

Proposizione

Siano $a, b \in \mathbb{R}$ e $\vec{v}, \vec{w}$ vettori liberi. Allora:

1. $(a + b)\vec{v} = a\vec{v} + b\vec{v}$
2. $a(\vec{v} + \vec{w}) = a\vec{v} + a\vec{w}$
3. $a(b\vec{v}) = (ab)\vec{v}$
4. $1 \cdot \vec{v} = \vec{v}$.

Proposizione (Condizione di parallelismo tra vettori liberi)

Due vettori liberi non nulli $\vec{v}$ e $\vec{w}$ sono paralleli $\Leftrightarrow$ esiste uno scalare $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ tale che $\vec{v} = \lambda\vec{w}$.

Siano $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$ e $\vec{w} = \overrightarrow{AC}$ due vettori liberi. L'angolo $\widehat{\vec{v}\vec{w}}$ è l'angolo convesso formato dai due vettori.

Definizione

Dati due vettori liberi $\vec{v}$ e $\vec{w}$, il prodotto scalare $\vec{v} \cdot \vec{w}$ è un numero definito in questo modo:

- è 0 se $\vec{v} = \vec{0}$ o $\vec{w} = \vec{0}$
- se $\vec{v}, \vec{w} \neq \vec{0}$, allora $\vec{v} \cdot \vec{w} = |\vec{v}| \cdot |\vec{w}| \cos \widehat{\vec{v}\vec{w}}$.

Osserviamo che $\vec{v} \cdot \vec{w} = \vec{w} \cdot \vec{v}$, cioè per il prodotto scalare vale la proprietà commutativa. Se $\vec{v}, \vec{w} \neq \vec{0}$, allora $\vec{v} \perp \vec{w} \Leftrightarrow \vec{v} \cdot \vec{w} = 0$. Con la convenzione di considerare il vettore nullo ortogonale ad ogni vettore, si può dire che due vettori liberi $\vec{v}$ e $\vec{w}$ sono ortogonali $\Leftrightarrow \vec{v} \cdot \vec{w} = 0$.

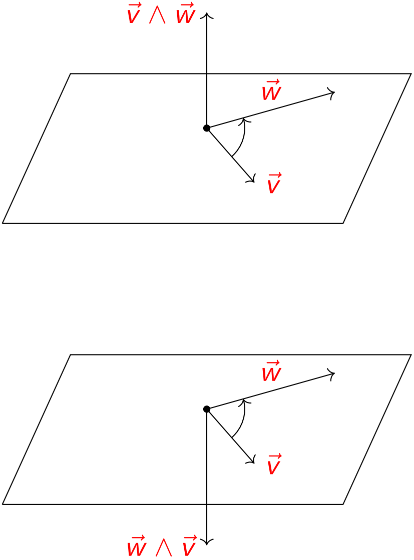
Proposizione

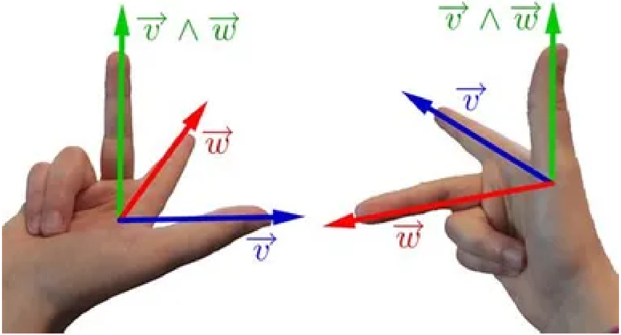
Dati $a \in \mathbb{R}$ e $\vec{v}, \vec{w}, \vec{z}$ vettori liberi, si ha:

1. $(a\vec{v}) \cdot \vec{w} = a(\vec{v} \cdot \vec{w})$
2. $\vec{v} \cdot (\vec{w} + \vec{z}) = \vec{v} \cdot \vec{w} + \vec{v} \cdot \vec{z}$.

Definizione

Dati due vettori liberi $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$ e $\vec{w} = \overrightarrow{AC}$, il prodotto vettoriale $\vec{v} \wedge \vec{w}$ è un vettore di modulo $|\vec{v}| \cdot |\vec{w}| \operatorname{sen} \widehat{\vec{v}\vec{w}}$. Se questo numero è 0, allora poniamo $\vec{v} \wedge \vec{w} = \vec{0}$. Altrimenti, $\vec{v} \wedge \vec{w}$ ha direzione ortogonale al piano individuato dai vettori $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$. Per quel che riguarda il verso, se si guarda il piano individuato da $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$ dalla parte in cui si trova $\vec{v} \wedge \vec{w}$, $\vec{v}$ per sovrapporsi a $\vec{w}$ deve percorrere l'angolo $\widehat{\vec{v}\vec{w}}$ in senso antiorario.


$\vec{v} \wedge \vec{w}$
$\vec{w}$
$\vec{v}$
$\vec{w}$
$\vec{v}$
$\vec{w} \wedge \vec{v}$


$\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{w}$
$\overrightarrow{w}$
$\overrightarrow{v}$
$\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{w}$
$\overrightarrow{v}$
$\overrightarrow{w}$

Osserviamo che $\vec{v} \wedge \vec{w} = -\vec{w} \wedge \vec{v}$, cioè per il prodotto vettoriale non vale la proprietà commutativa. Inoltre, per due vettori non nulli $\vec{v}$ e $\vec{w}$ si ha $\vec{v} \parallel \vec{w} \Leftrightarrow \vec{v} \wedge \vec{w} = \vec{0}$.

Proposizione

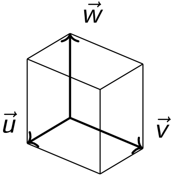
Dati $a \in \mathbb{R}$ e $\vec{v}, \vec{w}, \vec{z}$ vettori liberi, si ha:

1. $(a\vec{v}) \wedge \vec{w} = a(\vec{v} \wedge \vec{w})$
2. $\vec{v} \wedge (\vec{w} + \vec{z}) = \vec{v} \wedge \vec{w} + \vec{v} \wedge \vec{z}$.

Il prodotto misto di tre vettori liberi $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ è $\vec{u} \cdot \vec{v} \wedge \vec{w}$.

Proposizione

Il valore assoluto del prodotto misto $|\vec{u} \cdot \vec{v} \wedge \vec{w}|$ rappresenta il volume del parallelepipedo costruito sui tre vettori. Dunque, condizione necessaria e sufficiente perché tre vettori $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ siano complanari è che $\vec{u} \cdot \vec{v} \wedge \vec{w} = 0$.



Definizione

Chiamiamo versore un vettore di modulo unitario.

Se $\vec{v}$ è un vettore, allora $\vec{v} \cdot \vec{v} = |\vec{v}| \cdot |\vec{v}| \cos 0 = |\vec{v}|^2$. In particolare, se $\vec{v}$ è un versore $\vec{v} \cdot \vec{v} = 1$.

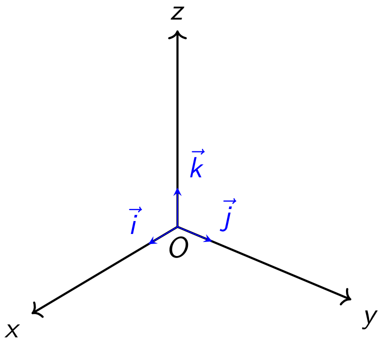
Proposizione

Sia $\vec{r}$ una retta orientata e sia $\vec{i}$ un versore su $\vec{r}$ avente lo stesso verso di $\vec{r}$. Allora $\vec{v} \cdot \vec{i}$ è pari alla lunghezza con segno del segmento proiezione di $\vec{v}$ su $\vec{r}$. In particolare, il vettore $(\vec{v} \cdot \vec{i})\vec{i}$ è la proiezione ortogonale di $\vec{v}$ sulla retta $\vec{r}$.

Proposizione (Scomposizione di vettori)

Siano $\vec{u}$ e $\vec{v}$ vettori non nulli. Allora esistono $\vec{u}_1, \vec{u}_2$, con $\vec{u}_1 \parallel \vec{v}$ e $\vec{u}_2 \perp \vec{v}$, tali che $\vec{u} = \vec{u}_1 + \vec{u}_2$.

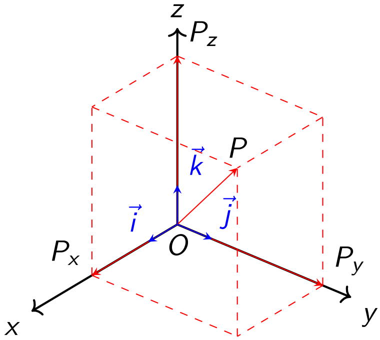
Nello spazio ordinario S assegnare un sistema di riferimento cartesiano ortogonale significa assegnare un punto O, origine delle coordinate, un'unità di misura u e tre rette orientate $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$ passanti per O, a due a due perpendicolari e tali che i versori $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ che ne determinano l'orientamento siano tali che $\vec{k} = \vec{i} \wedge \vec{j}$.



Ad un punto P dello spazio associamo una terna ordinata di numeri reali (x, y, z), che si dicono coordinate cartesiane di P.

Consideriamo il vettore libero $\vec{v} = \overrightarrow{OP}$. Siano P_x, P_y, P_z le proiezioni ortogonali di P sui tre assi cartesiani. $\vec{v}$ è la diagonale del parallelepipedo costruito su $\overrightarrow{OP_x}, \overrightarrow{OP_y}, \overrightarrow{OP_z}$, per cui:

$$\vec{v} = \overrightarrow{OP_x} + \overrightarrow{OP_y} + \overrightarrow{OP_z}.$$



$\overrightarrow{OP_x}, \overrightarrow{OP_y}, \overrightarrow{OP_z}$ sono le proiezioni ortogonali di $\vec{v}$ sugli assi $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$, per cui:

$$\overrightarrow{OP_x} = (\vec{v} \cdot \vec{i})\vec{i}$$

$$\overrightarrow{OP_y} = (\vec{v} \cdot \vec{j})\vec{j}$$

$$\overrightarrow{OP_z} = (\vec{v} \cdot \vec{k})\vec{k}$$

$$\Rightarrow \vec{v} = (\vec{v} \cdot \vec{i})\vec{i} + (\vec{v} \cdot \vec{j})\vec{j} + (\vec{v} \cdot \vec{k})\vec{k}.$$

$\vec{v} = (\vec{v} \cdot \vec{i})\vec{i} + (\vec{v} \cdot \vec{j})\vec{j} + (\vec{v} \cdot \vec{k})\vec{k}$, dove $\vec{v} \cdot \vec{i}$, $\vec{v} \cdot \vec{j}$, $\vec{v} \cdot \vec{k}$ sono le coordinate del punto P e sono anche dette componenti del vettore $\vec{v}$. Poniamo $\vec{v} \cdot \vec{i} = v_x$, $\vec{v} \cdot \vec{j} = v_y$, $\vec{v} \cdot \vec{k} = v_z$, per cui:

$$\vec{v} = v_x \vec{i} + v_y \vec{j} + v_z \vec{k}$$

e le componenti di $\vec{v}$ sono (v_x, v_y, v_z). Inoltre, $|\vec{v}| = \sqrt{v_x^2 + {v_y}^2 + {v_z}^2}$. Se $P_1 = (x_1, y_1, z_1)$ e $P_2 = (x_2, y_2, z_2)$, allora:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{P_1P_2} = \overrightarrow{OP_2} - \overrightarrow{OP_1} = x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k} - (x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}) = \\ = (x_2 - x_1)\vec{i} + (y_2 - y_1)\vec{j} + (z_2 - z_1)\vec{k}. \end{aligned}$$

$$|\overline{P_1P_2}| = |\overrightarrow{P_1P_2}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

Se $\vec{v} = v_x\vec{i} + v_y\vec{j} + v_z\vec{k}$ e $\vec{w} = w_x\vec{i} + w_y\vec{j} + w_z\vec{k}$, allora:

$$\vec{v}+\vec{w} = v_x\vec{i}+v_y\vec{j}+v_z\vec{k}+w_x\vec{i}+w_y\vec{j}+w_z\vec{k} = (v_x+w_x)\vec{i}+(v_y+w_y)\vec{j}+(v_z+w_z)\vec{k}.$$

Se $a \in \mathbb{R}$, allora:

$$a\vec{v} = a(v_x\vec{i} + v_y\vec{j} + v_z\vec{k}) = (av_x)\vec{i} + (av_y)\vec{j} + (av_z)\vec{k}.$$

Inoltre:

$$\begin{aligned}
\vec{v} \cdot \vec{w} &= (v_x\vec{i} + v_y\vec{j} + v_z\vec{k}) \cdot (w_x\vec{i} + w_y\vec{j} + w_z\vec{k}) = \\
&= v_x w_x \vec{i} \cdot \vec{i} + v_x w_y \vec{i} \cdot \vec{j} + v_x w_z \vec{i} \cdot \vec{k} + v_y w_x \vec{j} \cdot \vec{i} + v_y w_y \vec{j} \cdot \vec{j} + v_y w_z \vec{j} \cdot \vec{k} + \\
&\qquad + v_z w_x \vec{k} \cdot \vec{i} + v_z w_y \vec{k} \cdot \vec{j} + v_z w_z \vec{k} \cdot \vec{k}.
\end{aligned}$$

Ma dal momento che $\vec{i} \cdot \vec{j} = \vec{i} \cdot \vec{k} = \vec{j} \cdot \vec{k} = 0$ e $\vec{i} \cdot \vec{i} = \vec{j} \cdot \vec{j} = \vec{k} \cdot \vec{k} = 1$, si ha:

$$\vec{v} \cdot \vec{w} = v_x w_x + v_y w_y + v_z w_z.$$

Se $\vec{v}, \vec{w} \neq \vec{0}$, allora:

$$\cos \widehat{\vec{v}\vec{w}} = \frac{\vec{v} \cdot \vec{w}}{|\vec{v}| \cdot |\vec{w}|} = \frac{v_x w_x + v_y w_y + v_z w_z}{\sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}\sqrt{w_x^2 + w_y^2 + w_z^2}}$$

In particolare, $\vec{v} \perp \vec{w} \Leftrightarrow v_x w_x + v_y w_y + v_z w_z = 0$. Notiamo che:

$$\cos \widehat{\vec{v}\vec{i}} = \frac{v_x}{\sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}}, \quad \cos \widehat{\vec{v}\vec{j}} = \frac{v_y}{\sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}},$$

$$\cos \widehat{\vec{v}\vec{k}} = \frac{v_z}{\sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}}.$$

Questi numeri sono detti coseni direttori di $\vec{v}$ e si ha
$\cos^2 \widehat{\vec{v}\vec{i}} + \cos^2 \widehat{\vec{v}\vec{j}} + \cos^2 \widehat{\vec{v}\vec{k}} = 1$.

Dato che $\vec{i} \wedge \vec{j} = \vec{k}$, $\vec{k} \wedge \vec{i} = \vec{j}$, $\vec{j} \wedge \vec{k} = \vec{i}$ e $\vec{i} \wedge \vec{i} = \vec{j} \wedge \vec{j} = \vec{k} \wedge \vec{k} = \vec{0}$, allora:

$$\begin{aligned}\vec{v} \wedge \vec{w} &= (v_y w_z - v_z w_y)\vec{i} + (w_x v_z - v_x w_z)\vec{j} + (v_x w_y - v_y w_x)\vec{k} = \\ &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ v_x & v_y & v_z \\ w_x & w_y & w_z \end{vmatrix}\end{aligned}$$

Se $\vec{u} = u_x\vec{i} + u_y\vec{j} + u_z\vec{k}$, allora:

$$\begin{aligned}\vec{u} \cdot \vec{v} \wedge \vec{w} &= (v_y w_z - v_z w_y)u_x + (w_x v_z - v_x w_z)u_y + (v_x w_y - v_y w_x)u_z = \\ &= \begin{vmatrix} u_x & u_y & u_z \\ v_x & v_y & v_z \\ w_x & w_y & w_z \end{vmatrix}\end{aligned}$$

Sistema di riferimento nel piano

Nello piano assegnare un sistema di riferimento cartesiano ortogonale significa assegnare un punto O, origine delle coordinate, un'unità di misura u e due rette orientate $\vec{x}, \vec{y}$ passanti per O perpendicolari tra loro. Quindi, i versori $\vec{i}$ e $\vec{j}$ che ne determinano l'orientamento sono tali che $\vec{i} \cdot \vec{j} = 0$.
Ad un punto P dello spazio associamo una coppia ordinata di numeri reali (x, y), che si dicono coordinate cartesiane di P.
Consideriamo il vettore libero $\vec{v} = \overrightarrow{OP}$. Siano P_x e P_y le proiezioni ortogonali di P sui due assi cartesiani. Allora: $\vec{v}$ è la diagonale del parallelogramma individuato da $\overrightarrow{OP_x}$ e $\overrightarrow{OP_y}$, per cui:

$$\vec{v} = \overrightarrow{OP_x} + \overrightarrow{OP_y} = v_x\vec{i} + v_y\vec{j}.$$

Tutte le operazioni tra vettori (somma, prodotto di uno scalare per un vettore e prodotto scalare) si effettuano mediante le componenti.