Definizione

Siano V, W due k-s.v. Un'applicazione $f\colon V \to W$ si dice lineare se:

1. $f(v+v') = f(v) + f(v')$ per ogni $v, v' \in V$
2. $f(av) = af(v)$ per ogni $a \in k$ e $v \in V$.

Se $f\colon V \to W$ è lineare, allora $f(0_V) = 0_W$. Infatti, preso un qualsiasi $v \in V$:

$$f(0_v) = f(0 \cdot v) = 0 \cdot f(v) = 0_W.$$

Definizione

Sia $f\colon V \to W$ un'applicazione lineare tra due k-s.v. Chiamiamo immagine di f il sottoinsieme di W:

$$\operatorname{Im} f = \{w \in W \mid w = f(v) \text{ per qualche } v \in V\}.$$

Chiamiamo nucleo di f il sottoinsieme di V:

$$\ker f = \{v \in V \mid f(v) = 0_W\}.$$

Osserviamo che $0_W \in \operatorname{Im} f$ e $0_V \in \ker f$, per cui $\operatorname{Im} f, \ker f \neq \emptyset$.

Proposizione

Siano V, W due k-s.v. e sia $f\colon V \to W$ un'applicazione lineare. Allora:

1. $\operatorname{Im} f \subseteq W$ *e* $\ker f \subseteq V$ *sono due sottospazi*
2. *se* $V = \mathcal{L}(v_1, v_2, \dots, v_n) \Longrightarrow \operatorname{Im} f = \mathcal{L}(f(v_1), f(v_2), \dots, f(v_n))$.

DIMOSTRAZIONE

Osservazione

- L'applicazione $\theta\colon V \to W$ definita da $\theta(v) = 0_W$ per ogni $v \in V$ è un'applicazione lineare ed è detta applicazione nulla.
- Siano U, V, W k-s.v. e siano $f\colon V \to W$ e $g\colon W \to U$ applicazioni lineari. Allora l'applicazione composta $g \circ f\colon V \to U$ definita da:

$$(g \circ f)(v) = g(f(v)) \quad \forall v \in V$$

  è un'applicazione lineare.

Definizione

Sia V un k-s.v. Chiamiamo endomorfismo di V un'applicazione lineare $f\colon V \to V$.

L'applicazione identica $i_V\colon V \to V$ definita da $i_V(v) = v$ per ogni $v \in V$ è un endomorfismo.

Definizione

Sia $f\colon V \to W$ un'applicazione lineare tra due k-s.v. V e W. Diremo che f è iniettiva se è un'applicazione iniettiva, cioè se:

$$\forall v, v' \in V,\ v \neq v' \Longrightarrow f(v) \neq f(v').$$

Diremo che f è suriettiva se è un'applicazione suriettiva, cioè se ogni vettore di W è immagine di qualche vettore di V, cioè se $\operatorname{Im} f = W$.
Diremo che f è un isomorfismo se f è iniettiva e suriettiva.
DIremo che f è invertibile se esiste $g\colon W \to V$ applicazione lineare tale che $g \circ f = i_v$ e $f \circ g = i_W$. g è detta applicazione inversa e si indica con f^{-1}.

Proposizione

Sia $f\colon V \to W$ un'applicazione lineare tra due k-s.v. V e W. Allora:

$$f \text{ \emph{è iniettiva}} \Longleftrightarrow \ker f = \{0_V\}.$$

DIMOSTRAZIONE.

Proposizione

Sia $f : V \to W$ *un'applicazione lineare tra due* k*-s.v.* V *e* W*. Allora:*

$$f \text{ è un isomorfismo} \iff f \text{ è invertibile.}$$

Proposizione

Sia $f : V \to W$ *un'applicazione lineare tra due* k*-s.v.* V *e* W*. Allora:*

1. *se* f *è iniettiva e* $v_1, \ldots, v_r \in V$ *sono l.i.* $\implies f(v_1), \ldots, f(v_r)$ *sono l.i.*
2. *se* $f(v_1), \ldots, f(v_r)$ *sono l.i.* $\implies v_1, \ldots, v_r \in V$ *sono l.i.*

DIMOSTRAZIONE

Corollario

Sia $f\colon V \to W$ *un'applicazione lineare tra due* k*-s.v.* V *e* W *e siano* $\dim V = n$ e $\dim W = m$*. Allora:*

1. *se* f *è iniettiva* $\Rightarrow n \leq m$
2. *se* f *è suriettiva* $\Rightarrow n \geq m$
3. *se* f *è un isomorfismo* $\Rightarrow n = m$
4. *se* f *è un isomorfismo e* $[v_1, \ldots, v_n]$ *è una base di* $V \Rightarrow$ $[f(v_1), \ldots, f(v_n)]$ *è una base di* W*.*

Teorema (Teorema della dimensione)

Sia $f\colon V \to W$ *un'applicazione lineare tra due* k*-s.v.* V *e* W *e sia* V *finitamente generato. Allora:*

$$\dim \ker f + \dim \operatorname{Im} f = \dim V.$$

DIMOSTRAZIONE

Ci sono tre modi tra loro equivalenti per assegnare un'applicazione lineare.
PRIMO MODO

Teorema

Siano V, W *due k-s.v.,* $\mathcal{A} = [v_1, \ldots, v_n]$ *una base di* V *e* $w_1, \ldots, w_n \in W$ *vettori arbitrari. Allora esiste un'unica applicazione lineare* $f : V \to W$ *tale che:*

$$f(v_1) = w_1,\ f(v_2) = w_2,\ \ldots, f(v_n) = w_n.$$

DIMOSTRAZIONE

Corollario

Siano V, W *due k-s.v.,* $f : V \to W$, $g : V \to W$ *due applicazioni lineari e* $\mathcal{A} = [v_1, \ldots, v_n]$ *una base di* V*. Allora:*

$$f = g \iff f(v_1) = g(v_1),\ f(v_2) = g(v_2),\ \ldots,\ f(v_n) = g(v_n).$$

SECONDO MODO

Siano V, W due k-s.v. e siano $\mathcal{A} = [v_1, \dots, v_n]$ una base di V e $\mathcal{B} = [w_1, \dots, w_m]$ una base di W. Ogni vettore $v \in V$ è determinato dalle sue componenti $[v]_{\mathcal{A}} = (x_1, \dots, x_n)$ e ogni $w \in W$ da $[w]_{\mathcal{B}} = (y_1, \dots, y_m)$. Quindi, un'applicazione lineare $f\colon V \to W$ è assegnata se assegniamo una legge:

$$f(v) = w \iff f(x_1 v_1 + \cdots + x_n v_n) = y_1 w_1 + \cdots + y_m w_m,$$

dove $y_1, \dots, y_m$ sono espresse mediante polinomi lineari e omogenei nelle x_i:

$$\begin{cases} y_1 = a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n \\ y_2 = a_{21}x_1 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \dots \\ y_m = a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n. \end{cases}$$

TERZO MODO

Definizione

Siano V, W due k-s.v. e siano $\mathcal{A} = [v_1, \dots, v_n]$ una base di V e $\mathcal{B} = [w_1, \dots, w_m]$ una base di W. Se $f \colon V \to W$ è un'applicazione lineare, chiamiamo matrice associata a f rispetto alle basi $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ la matrice $M^{\mathcal{A},\mathcal{B}}(f)$ che ha per colonne $[f(v_1)]_{\mathcal{B}}, [f(v_2)]_{\mathcal{B}}, \dots, [f(v_n)]_{\mathcal{B}}$, cioè:

$$M^{\mathcal{A},\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \in k^{m,n},$$

dove:

$$\begin{aligned} f(v_1) &= a_{11}w_1 + a_{21}w_2 + \dots + a_{m1}w_m \\ f(v_2) &= a_{12}w_1 + a_{22}w_2 + \dots + a_{m2}w_m \\ &\dots \\ f(v_n) &= a_{1n}w_1 + a_{2n}w_2 + \dots + a_{mn}w_m. \end{aligned}$$

Osservazione

Se $v \in V$ e $[v]_{\mathcal{A}} = (x_1, \ldots, x_n)$, allora $[f(v)]_{\mathcal{B}} = M^{\mathcal{A},\mathcal{B}}(f)[v]_{\mathcal{A}}$, cioè:

$$M^{\mathcal{A},\mathcal{B}}(f) \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix} = [f(v)]_{\mathcal{B}}.$$

Definizione
Siano V, W due k-s.v., $\mathcal{A} = [v_1, \dots, v_n]$ una base di V, $\mathcal{B} = [w_1, \dots, w_m]$ una base di W e sia $A \in k^{m,n}$ una matrice:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Definiamo applicazione lineare associata ad A rispetto alle basi $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ l'applicazione lineare $\varphi \colon V \to W$ definita da:

$$\varphi(v_i) = a_{1i}w_1 + a_{2i}w_2 + \dots + a_{mi}w_m, \ \forall i,$$

cioè tale che $A = M^{\mathcal{A},\mathcal{B}}(\varphi)$.

Se $f\colon V \to V$ è un endomorfismo e $\mathcal{A}$ è una base di V, allora:

$$M^{\mathcal{A},\mathcal{A}}(f) = M^{\mathcal{A}}(f).$$

Se $f\colon k^n \to k^n$ ed $\mathcal{E}$ è la base canonica di k^n, allora:

$$M^{\mathcal{E}}(f) = M(f).$$

Osservazione

Se $f\colon V \to W$ è un'applicazione lineare tra due k-s.v. V e W e se $\mathcal{A} = [v_1, \dots, v_n]$ è una base di V e $\mathcal{B}$ è una base di W, allora:

$$\operatorname{Im} f = \mathcal{L}(f(v_1), \dots, f(v_n)) \Longrightarrow \dim \operatorname{Im} f = \rho(M^{\mathcal{A},\mathcal{B}}(f)).$$

Fare esercizi dal 3.1 al 3.8 dal libro di esercizi. Fatti questi, fare esercizi da 3.9 a 3.30 dal libro di esercizi. Per ulteriori esercizi presi dai compiti assegnati, fare da 1.1 a 1.25 da "Esercizi sulle applicazioni lineari, immagini, controimmagini, restrizioni ed estensioni".

Definizione

Siano V, W due k-s.v. e siano $f: V \to W$ e $g: V \to W$ due applicazioni lineari. La somma di f e g è l'applicazione lineare $f + g: V \to W$ definita da $(f+g)(v) = f(v) + g(v) \, \forall v \in V$.

Definizione

Siano V, W due k-s.v., $f: V \to W$ un'applicazione lineare e $a \in k$. Il prodotto di af è l'applicazione lineare $af: V \to W$ definita da $(af)(v) = af(v) \, \forall v \in V$.

Osservazione

Siano V, W due k-s.v., $\mathcal{A}$ una base di V, $\mathcal{B}$ una base di W, $f: V \to W$ e $g: V \to W$ due applicazioni lineari e $a, b \in k$. Allora:

$$M^{\mathcal{A},\mathcal{B}}(f+g) = M^{\mathcal{A},\mathcal{B}}(f) + M^{\mathcal{A},\mathcal{B}}(g) \quad \text{e} \quad M^{\mathcal{A},\mathcal{B}}(af) = aM^{\mathcal{A},\mathcal{B}}(f).$$

In particolare, $M^{\mathcal{A},\mathcal{B}}(af + bg) = aM^{\mathcal{A},\mathcal{B}}(f) + bM^{\mathcal{A},\mathcal{B}}(g)$.

Proposizione

Siano V, W, U *k-s.v. e* $f\colon V \to W$ *e* $g\colon W \to U$ *applicazioni lineari. Siano* $\mathcal{A}$ *una base di* V, $\mathcal{B}$ *una base di* W *e* $\mathcal{C}$ *una base di* U*. Allora:*

$$M^{\mathcal{A},\mathcal{C}}(g \circ f) = M^{\mathcal{B},\mathcal{C}}(g) \cdot M^{\mathcal{A},\mathcal{B}}(f).$$

Proposizione

Siano V, W *due k-s.v. e* $f\colon V \to W$ *un isomorfismo. Siano* $\mathcal{A}$ *e* $\mathcal{B}$ *due basi di* v *e* W*, rispettivamente. Allora:*

$$M^{\mathcal{B},\mathcal{A}}(f^{-1}) = \left(M^{\mathcal{A},\mathcal{B}}(f)\right)^{-1}.$$

Definizione

Sia $f\colon V \to W$ un'applicazione lineare tra due k-s.v. V e W. Siano $w \in W$ e $T \subseteq W$. Si chiamano controimmagine di w e controimmagine di T, rispettivamente, gli insiemi:

$$f^{-1}(w) = \{v \in V \mid f(v) = w\} \quad \text{e} \quad f^{-1}(T) = \{v \in V \mid f(v) \in T\}.$$

Prima di andare avanti, fare esercizi da 4.1 a 4.29 dal libro di esercizi. Successivamente, fare da 2.1 a 2.13 da “Esercizi sulle applicazioni lineari, immagini, controimmagini, restrizioni ed estensioni”.

Fatti gli esercizi precedenti, fare da 5.1 a 5.12 dal libro di esercizi. Successivamente, fare da 3.1 a 3.11 e da 4.1 a 4.3 da “Esercizi sulle applicazioni lineari, immagini, controimmagini, restrizioni ed estensioni”.

Definizione

Se $f\colon V \to W$ e $U \subseteq V$ è un sottospazio, la restrizione di f a U è $f|_U\colon U \to W$ definita da $f|_U(u) = f(u)$ per ogni $u \in U$ ed è un'applicazione lineare. Se $[u_1, \dots, u_r]$ è una base di U, allora $f|_U\colon U \to W$ è definita da $f(u_1), \dots, f(u_r)$.

Se $V \subseteq V'$, con V' k-s.v. e V sottospazio di V', ogni applicazione lineare $g\colon V' \to W$ tale che $g|_V = f$ è detta estensione di f. In tal caso, sia $\mathcal{A} = [v_1, \dots, v_n]$ una base di V e sia $[v_1, \dots, v_n, v'_{n+1}, \dots, v'_m]$ una base di V' (abbiamo completato ad una base di V'). Se $g\colon V' \to W$ è un'estensione di f, questo significa che certamente:

$$g(v_1) = f(v_1),\ g(v_2) = f(v_2),\ \dots,\ g(v_n) = f(v_n).$$

Invece, $g(v'_{n+1}), \dots, g(v'_m)$ possono essere dei vettori qualsiasi di W.
Se $\operatorname{Im} f \subset T$, con T k-s.v., allora si può considerare l'applicazione lineare $g\colon V \to T$ tale che $g(v) = f(v)$ per ogni $v \in V$. Si dice che g è indotta da f.

Fare esercizi da 5.1 a 5.7 da "Esercizi sulle applicazioni lineari, immagini, controimmagini, restrizioni ed estensioni" e tutti gli esercizi da "Competenze minime UDE3" e "Tutte le competenze UDE3". Tutti i file sono reperibili su studium.

Siano V un k-s.v. $\mathcal{A} = [u_1, \dots, u_n]$ e $\mathcal{B} = [v_1, \dots, v_n]$ basi di V. Siano:

$$u_i = a_{1i}v_1 + a_{2i}v_2 + \dots + a_{ni}v_n \quad \forall i = 1, \dots, n$$
$$v_i = b_{1i}u_1 + b_{2i}u_2 + \dots + b_{ni}u_n \quad \forall i = 1, \dots, n.$$

Le matrici:

$$P^{\mathcal{A},\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \quad P^{\mathcal{B},\mathcal{A}} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{pmatrix}$$

sono dette matrici del cambiamento di base o di passaggio, la prima da $\mathcal{A}$ a $\mathcal{B}$, la seconda da $\mathcal{B}$ a $\mathcal{A}$. Quindi, la prima colonna di $P^{\mathcal{A},\mathcal{B}}$ è $[u_1]_{\mathcal{B}}$, la seconda è $[u_2]_{\mathcal{B}}$, e così via fino all'ultima che è $[u_n]_{\mathcal{B}}$.

Consideriamo $i\colon V \to V$ l'endomorfismo identico, cioè tale che $i(v) = v$ per ogni $v \in V$. Vogliamo scrivere $M^{\mathcal{A},\mathcal{B}}(i)$:

$$\begin{aligned}
i(u_1) = u_1 &\Longrightarrow [i(u_1)]_{\mathcal{B}} = [u_1]_{\mathcal{B}} \\
i(u_2) = u_2 &\Longrightarrow [i(u_2)]_{\mathcal{B}} = [u_2]_{\mathcal{B}} \\
\dots \\
i(u_n) = u_n &\Longrightarrow [i(u_n)]_{\mathcal{B}} = [u_n]_{\mathcal{B}}.
\end{aligned}$$

Quindi, $M^{\mathcal{A},\mathcal{B}}(i) = P^{\mathcal{A},\mathcal{B}}$.

$$P^{\mathcal{A},\mathcal{B}}[v]_{\mathcal{A}} = [v]_{\mathcal{B}} \quad \forall v \in V.$$

Inoltre, $P^{\mathcal{B},\mathcal{A}} = (P^{\mathcal{A},\mathcal{B}})^{-1}$. Infatti, dato che $i \circ i = i$:

$$P^{\mathcal{B},\mathcal{A}}P^{\mathcal{A},\mathcal{B}} = M^{\mathcal{B},\mathcal{A}}(i)M^{\mathcal{A},\mathcal{B}}(i) = M^{\mathcal{A},\mathcal{A}}(i \circ i) = M^{\mathcal{A},\mathcal{A}}(i) = I.$$

Sia $f\colon V \to W$ un'applicazione lineare tra due k-s.v. V e W e siano $\mathcal{A}, \mathcal{A}'$ due basi di V e $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ due basi di W. Allora:

$$M^{\mathcal{A}',\mathcal{B}'}(f) = P^{\mathcal{B},\mathcal{B}'} M^{\mathcal{A},\mathcal{B}}(f) P^{\mathcal{A}',\mathcal{A}}.$$

Se $\mathcal{B} = \mathcal{A}$ e $\mathcal{B}' = \mathcal{A}'$, allora:

$$M^{\mathcal{A}'}(f) = P^{\mathcal{A},\mathcal{A}'} M^{\mathcal{A}}(f) P^{\mathcal{A}',\mathcal{A}} = (P^{\mathcal{A}',\mathcal{A}})^{-1} M^{\mathcal{A}}(f) P^{\mathcal{A}',\mathcal{A}}.$$

Definizione

Due matrici $A, B \in k^{n,n}$ sono simili se esiste una matrice invertibile $P \in k^{n,n}$ tale che $A = P^{-1}BP$.

Teorema

Due matrici $A, B \in k^{n,n}$ sono simili $\Leftrightarrow$ sono associate allo stesso endomorfismo rispetto a basi diverse.

DIMOSTRAZIONE.

Definizione

Sia $f\colon V \to V$ un endomorfismo di un k-s.v. V. Un elemento $\lambda \in k$ si dice autovalore per f se esiste $v \in V$, $v \neq 0_V$, tale che $f(v) = \lambda v$.
Un vettore $v \in V$, $v \neq 0_V$, si dice autovettore per f se esiste $\lambda \in k$ tale che $f(v) = \lambda v$. In tal caso, v è detto autovettore associato all'autovalore λ.

Osservazione

Nella definizione di autovalore e di autovettore si chiede che $v \neq 0_V$.
Infatti, l'uguaglianza $f(v) = \lambda v$ per $v = 0_V$ diventa:

$$f(0_V) = \lambda 0_V = 0_V.$$

Ma questa è una condizione sempre verificata ed indipendente da λ, cioè, se non dicessimo $v \neq 0_V$, tutti gli elementi di k sarebbero autovalori.

Fare esercizi da 1.1 a 1.4 da "Esercizi sulla semplicità, sulla diagonalizzazione ed esercizi di riepilogo", file reperibile su studium.

Proposizione

Sia $f\colon V \to V$ un endomorfismo di un k-s.v. V. Allora:

$$0 \text{ è autovalore per } f \iff \ker f \neq \{0_V\} \iff f \text{ non è un isomorfismo.}$$

DIMOSTRAZIONE

Sia $f\colon V \to V$ un endomorfismo di un k-s.v. V e sia $\lambda \in k$. L'applicazione $f_\lambda\colon V \to V$ definita da:

$$f_\lambda(v) = f(v) - \lambda v, \forall v \in V$$

è un endomorfismo di V. Notiamo che $f_\lambda = f - \lambda i_V$. Quindi, se $\mathcal{A}$ è una base di V, si ha:

$$M^{\mathcal{A}}(f_\lambda) = M^{\mathcal{A}}(f - \lambda i_V) = M^{\mathcal{A}}(f) - \lambda M^{\mathcal{A}}(i_V) = M^{\mathcal{A}}(f) - \lambda I.$$

Teorema

Sia $f : V \to V$ *un endomorfismo di un* k*-s.v.* V *di dimensione* n *e sia* $\mathcal{A}$ *una base di* V*. Allora* $\lambda \in k$ *è un autovalore per* $f \iff |M^{\mathcal{A}}(f) - \lambda I| = 0$*.*

DIMOSTRAZIONE

Definizione

Sia $A \in k^{n,n}$ e sia T un'indeterminata. Si chiama polinomio caratteristico di A il determinante:

$$P_A(T) = |A - TI| \in k[T].$$

Se A è la matrice associata a f rispetto a una base $\mathcal{A}$ di V, allora $P_A(T)$ è anche detto polinomio caratteristico di f e si indica con $P(T)$:

$$P(T) = |M^{\mathcal{A}}(f) - TI|.$$

Proposizione (Invarianza del polinomio caratteristico)

Sia $f\colon V \to V$ un endomorfismo e siano $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ due basi di V. Allora $|M^{\mathcal{A}}(f) - TI| = |M^{\mathcal{B}}(f) - TI|$.

DIMOSTRAZIONE

Definizione

Sia $f\colon V \to V$ un endomorfismo e sia $\lambda \in k$ un autovalore. Chiamiamo autospazio associato a λ questo sottospazio di V:

$$V_\lambda = \{v \in V \mid f(v) = \lambda v\}.$$

Dunque, $V_\lambda = \{\text{autovettori associati a } \lambda\} \cup \{0_V\}$.

Osservazione

$V_\lambda = \ker f_\lambda$, dove $f_\lambda = f - \lambda i_V$. Infatti:

$$v \in V_\lambda \iff f(v) = \lambda v \iff f(v) - \lambda v = 0_V \iff f_\lambda(v) = 0_V \iff v \in \ker f_\lambda.$$

Quindi, $\dim V_\lambda = n - \rho(M^{\mathcal{A}}(f_\lambda)) = n - \rho(M^{\mathcal{A}}(f) - \lambda I)$. Inoltre, se 0 è autovalore, allora $V_0 = \ker f$.

Teorema (Indipendenza degli autovettori)

Sia $f\colon V \to V$ un endomorfismo e siano $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ autovalori distinti. Siano $v_1 \in V_{\lambda_1}$,...,$v_r \in V_{\lambda_r}$ autovettori. Allora:

$$v_1, \ldots, v_r \text{ sono l.i.}$$

DIMOSTRAZIONE

Corollario

Se V è uno spazio di dimensione n, allora ogni endomorfismo di V ammette al più n autovalori.

DIMOSTRAZIONE

Definizione

Un endomorfismo $f\colon V \to V$ di un k-s.v. V si dice semplice se esiste una base di V formata da autovettori.

Osservazione

Se $f\colon V \to V$ è un endomorfismo semplice e se $\mathcal{A}$ è una base di autovettori di V, allora $M^{\mathcal{A}}(f)$ è diagonale e sulla diagonale compaiono gli autovalori di f.

Proposizione

Sia V un k-s.v. e sia $f: V \to V$ un endomorfismo avente n autovalori distinti. Allora f è semplice.

DIMOSTRAZIONE

Definizione

Sia $f: V \to V$ un endomorfismo di un k-s.v. V di dimensione finita e sia $\lambda \in k$ un suo autovalore. La molteplicità geometrica di λ è:

$$g_\lambda = \dim V_\lambda.$$

Definizione

Sia $f: V \to V$ un endomorfismo di un k-s.v. V di dimensione finita e sia $\lambda \in k$ un suo autovalore. Chiamiamo molteplicità algebrica di λ, e si indica con m_λ, la molteplicità di λ come radice del polinomio caratteristico $P(T)$ di f. Dunque, $m_\lambda = r$ se $P(T) = (T - \lambda)^r \cdot h(T)$, con $h(T)$ polinomio in T, e se $h(\lambda) \neq 0$.

Teorema

Sia $f: V \to V$ un endomorfismo di un k-s.v. V e sia $\lambda \in k$ un suo autovalore di molteplicità algebrica m_λ. Allora:

$$1 \leq \dim V_\lambda \leq m_\lambda$$

DIMOSTRAZIONE

Corollario

Sia $f: V \to V$ un endomorfismo di un k-s.v. V e siano $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ gli autovalori distinti di f. Allora sono equivalenti i seguenti fatti:

1. *f è semplice*
2. $\dim V = \dim V_{\lambda_1} + \cdots + \dim V_{\lambda_r}$
3. *$\lambda_i \in k$ per ogni i e $\dim V_{\lambda_i} = m_{\lambda_i}$ per ogni i.*

DIMOSTRAZIONE

Definizione

Una matrice $A \in k^{n,n}$ si dice diagonalizzabile se è simile a una matrice diagonale, cioè se esiste una matrice invertibile P tale che $P^{-1}AP$ è diagonale.

Data $A \in k^{n,n}$, posso considerare $\varphi_A \colon k^n \to k^n$ tale che $M(\varphi_A) = A$.

Teorema

Una matrice $A \in k^{n,n}$ è diagonalizzabile se e solo se l'endomorfismo associato φ_A è semplice. Inoltre, detta $\mathcal{F}$ una base di k^n formata da autovettori di φ_A, la matrice del cambio di base $P = P^{\mathcal{F},\mathcal{E}}$ permette la diagonalizzazione, cioè $P^{-1}AP$ è una matrice diagonale che ha come elementi sulla diagonale gli autovalori di A.

DIMOSTRAZIONE

Fare, prima di tutto, gli esercizi del capitolo 6 dal libro di esercizi. Dopo, fare gli esercizi da 2.1 a 3.4 da "Esercizi sulla semplicità, sulla diagonalizzazione ed esercizi di riepilogo" e gli esercizi di "Competenze minime UDE4" e "Tutte le competenze UDE4", reperibili su studium. Questi esercizi assolutamente imprescindibili.

Dopo di ciò, proseguire con gli esercizi del capitolo 7 dal libro di esercizi e proseguire con il capitolo 8.

Fatto tutto questo, terminare con gli esercizi da 4.1 a 4.13 da "Esercizi sulla semplicità, sulla diagonalizzazione ed esercizi di riepilogo".