Proposizione

Sia V un k-s.v. e siano $U, W \subseteq V$ due sottospazi. Allora $U \cap W$ è un sottospazio.

DIMOSTRAZIONE.

Proposizione

Sia V un k-s.v. e siano $U, W \subseteq V$ due sottospazi. Allora $U \cup W$ è un sottospazio $\iff U \subseteq W$ oppure $W \subseteq U$.

Definizione

Siano U, W due sottospazi di un k-s.v. V. Chiamiamo somma di U e W il sottospazio:

$$U + W = \{u + w \mid u \in U,\ w \in W\}.$$

È il più piccolo sottospazio di V contenente sia U che W.

Definizione

Siano U, W due sottospazi di un k-s.v. V. Diremo che la somma di U e W è una somma diretta, e scriviamo $U \oplus W$, se ogni vettore $x \in U + W$ si può esprimere in modo unico come somma di un vettore di U e di uno di W, cioè se:

$$x = u_1 + w_1,\ x = u_2 + w_2, \qquad u_1, u_2 \in U,\ w_1, w_2 \in W,$$

allora $u_1 = u_2$ e $w_1 = w_2$.

Proposizione

Sia V un k-s.v. e siano $U, W \subseteq V$ due sottospazi di V. Allora la somma è diretta $\iff U \cap W = \{0_V\}$.

DIMOSTRAZIONE.

Definizione

Sia V un k-s.v. e siano $v_1, \dots, v_r \in V$. Un vettore del tipo $a_1 v_1 + \dots a_r v_r$ con coefficienti $a_i \in k$ si chiama combinazione lineare dei vettori $v_1, \dots, v_r$.

Definizione

Sia V un k-s.v. e siano $v_1, \dots, v_r \in V$. Indichiamo con $\mathcal{L}(v_1, \dots, v_r)$ l'insieme delle combinazioni lineari di $v_1, \dots, v_r$, cioè:

$$\mathcal{L}(v_1, \dots, v_r) = \{a_1 v_1 + \cdots + a_r v_r \mid a_i \in k\}.$$

$\mathcal{L}(v_1, \dots, v_r)$ è un sottospazio di V ed è detto sottospazio generato da $v_1, \dots, v_r$ e $v_1, \dots, v_r$ sono detti generatori di tale spazio. Se $V = \mathcal{L}(v_1, \dots, v_r)$, diremo che $v_1, \dots, v_r$ è un sistema di generatori di V e che V è finitamente generato.

Gli spazi vettoriali k^n, $k^{m,n}$ e $k[x]_r$ sono finitamente generati, mentre $k[x]$ non lo è.

Fare esercizi 2.1 e 2.2 dal libro di esercizi.

Notiamo che, se $U = \mathcal{L}(u_1, \ldots, u_r)$ e $W = \mathcal{L}(w_1, \ldots, w_s)$ sono sottospazi di un k-s.v. V, allora:

$$U + W = \mathcal{L}(u_1, \ldots, u_r, w_1, \ldots, w_s).$$

Un sottospazio di k^n può essere assegnato in tre modi:

- mediante le equazioni cartesiane
- mediante il vettore generico
- mediante un sistema di generatori.

Questi tre modi sono equivalenti.

Proposizione

Sia V un k-s.v. f.g. (finitamente generato), $V = \mathcal{L}(v_1, \dots, v_n)$, e supponiamo che uno dei v_i sia combinazione lineare degli altri generatori:

$$v_i = b_1 v_1 + \cdots + b_{i-1} v_{i-1} + b_{i+1} v_{i+1} + \cdots + b_n v_n,$$

dove $b_1, \dots, b_{i-1}, b_{i+1}, \dots, b_n \in k$. Allora:

$$V = \mathcal{L}(v_1, \dots, v_{i-1}, v_{i+1}, \dots, v_n),$$

cioè è possibile scartare v_i dall'insieme dei generatori di V.

Proposizione

Siano V un k-s.v. f.g. (finitamente generato), $V = \mathcal{L}(v_1, \dots, v_n)$, e

$$v_i' = v_i + b_1 v_1 + \cdots + b_{i-1} v_{i-1} + b_{i+1} v_{i+1} + \cdots + b_n v_n,$$

dove $b_1, \dots, b_{i-1}, b_{i+1}, \dots, b_n \in k$. Allora:

$$V = \mathcal{L}(v_1, \dots, v_{i-1}, v_i', v_{i+1}, \dots, v_n).$$

Definizione

Sia V un k-s.v. e siano $v_1, \ldots, v_n \in V$. Diremo che i vettori $v_1, \ldots, v_n$ sono linearmente indipendenti o che formano un insieme libero se la loro unica combinazione lineare nulla è quella a coefficienti tutti nulli, cioè:

$$a_1 v_1 + \cdots + a_n v_n = 0_V \Longrightarrow a_1 = \cdots = a_n = 0.$$

Se $v_1, \ldots, v_n$ non sono linearmente indipendenti, diremo che sono linearmente dipendenti.

La base canonica di k^n e le basi standard di $k^{m,n}$ e $k[x]_r$ sono costituite da vettori linearmente indipendenti.

Fare esercizi 2.4, 2.5, 2.6, 2.7, 2.8 e 2.9 dal libro di esercizi.

Proposizione

Sia V un k-s.v. e siano $v_1, \ldots, v_n \in V$. Allora $v_1, \ldots, v_n$ sono linearmente indipendenti $\Longleftrightarrow$ valgono queste condizioni:

1. $v_1 \neq 0_V$
2. $v_i \notin \mathcal{L}(v_1, \ldots, v_{i-1})$ *per* $i = 2, \ldots, n$.

DIMOSTRAZIONE.

Definizione

Sia V un k-s.v. e siano $v_1, \ldots, v_n \in V$. Diremo che $v_1, \ldots, v_n$ formano una base di V se ogni vettore $v \in V$ si scrive in modo unico come combinazione lineare di $v_1, \ldots, v_n$, cioè:

$$v = a_1 v_1 + \cdots + a_n v_n, \quad \text{per qualche } a_1, \ldots, a_n \in k,$$

e questa scrittura è unica, cioè se:

$$v = a_1 v_1 + \cdots + a_n v_n \text{ e } v = b_1 v_1 + \cdots + b_n v_n$$

allora deve essere $a_1 = b_1$, ..., $a_n = b_n$.

Osservazione

Una base è un insieme ordinato, cioè se $v_1, \ldots, v_n$ formano una base, gli stessi vettori presi in ordine diverso formeranno un'altra base di V, distinta dalla precedente. Scriviamo $\mathcal{A} = [v_1, v_2, \ldots, v_n]$, ma $\mathcal{B} = [v_2, v_1, \ldots, v_n]$ è un'altra base di V distinta da $\mathcal{A}$.

Definizione

Sia V un k-s.v. e sia $\mathcal{A} = [v_1, \dots, v_n]$ una sua base. Per ogni vettore $v \in V$ chiamiamo componenti di v rispetto alla base $\mathcal{A}$ l'unica n-upla di elementi di k tale che:

$$v = a_1 v_1 + \cdots + a_n v_n$$

e scriviamo:

$$[v]_{\mathcal{A}} = (a_1, \dots, a_n).$$

Teorema

Sia V un k-s.v. e siano $v_1, \ldots, v_n \in V$. Allora $v_1, \ldots, v_n$ formano una base di $V \iff$ valgono le seguenti condizioni:

1. *$v_1, \ldots, v_n$ sono linearmente indipendenti*
2. *$V = \mathcal{L}(v_1, \ldots, v_n)$, cioè $v_1, \ldots, v_n$ sono generatori di V.*

DIMOSTRAZIONE.

La base canonica di k^n, $\mathcal{E} = [e_1, \ldots, e_n]$ (o anche $\mathcal{E}_n$), è una base di k^n. La base standard $[E_{11}, E_{12}, \ldots, E_{mn}]$ di $k^{m,n}$ è una base di $k^{m,n}$. La base standard $[1, x, \ldots, x^r]$ di $k[x]_r$ è una base di $k[x]_r$.
Fare esercizi 2.3, 2.10 e 2.11 dal libro di esercizi.

Teorema (Teorema di esistenza di una base)

Sia V un k-s.v. f.g. e sia $V = \mathcal{L}(v_1, \dots, v_n)$. allora dai generatori di V si può estrarre una base, cioè esiste una base di V costituita da alcuni dei vettori v_1,...,v_n.

DMOSTRAZIONE.

Teorema (Teorema del completamento ad una base)

Sia V un k.s.v. f.g. e sia $V = \mathcal{L}(v_1, \dots, v_n)$. Siano $u_1, \dots, u_r \in V$ vettori linearmente indipendenti. Allora esiste una base di V contenente $u_1, \dots, u_r$.

DIMOSTRAZIONE.

Lemma di Steinitz

Sia V un k-s.v. f.g. e sia $v_1, \dots, v_n$ un sistema di generatori di V. Siano $u_1, \dots, u_m \in V$ vettori linearmente indipendenti. Allora $m \leq n$.

Teorema

Sia V un k-s.v. e siano $[v_1, \dots, v_n]$ e $[u_1, \dots, u_m]$ due basi di V. Allora $m = n$, cioè tutte le basi di V hanno lo stesso numero di elementi.

DIMOSTRAZIONE.

Definizione

Sia V un k-s.v. Diremo che V ha dimensione n, e scriviamo $\dim V = n$, se V ha una base formata da n vettori e, quindi, ogni base di V è formata da n vettori.

$\dim k^n = n$, $\dim k^{m,n} = m \cdot n$ e $\dim k[x]_r = r + 1$.

Proposizione

Sia V un k-s.v. di dimensione n. Allora:

1. *se $v_1, \ldots, v_n \in V$ sono linearmente indipendenti $\Longrightarrow$ formano una base di V*
2. *se $u_1, \ldots, u_n \in V$ generano V $\Longrightarrow$ formano una base*
3. *se $v_1, \ldots, v_m \in V$, con $m > n$ $\Longrightarrow$ essi sono linearmente dipendenti*
4. *se $v_1, \ldots, v_m \in V$, con $m < n$ $\Longrightarrow$ essi non sono un sistema di generatori di V.*

DIMOSTRAZIONE.

Tutti gli spazi vettoriali V f.g. hanno $\dim V > 0$, tranne per il sottospazio nullo $\{0_V\}$, che è l'unico ad avere dimensione 0.

Proposizione

Sia V un k-s.v. di dimensione n e sia $W \subseteq V$ un suo sottospazio. Allora:

1. $\dim W \leq n$ *e, in particolare, W è f.g.*
2. $\dim W = n \Longleftrightarrow W = V$.

Teorema (Formula di Grassmann)

Sia V un k-s.v. e siano $U, W \subseteq V$ due suoi sottospazi. Allora:

$$\dim(U + W) = \dim U + \dim W - \dim(U \cap W).$$

In particolare, se la somma di U e W è diretta di ha:

$$\dim(U \oplus W) = \dim U + \dim W.$$

Sia $A \in k^{m,n}$ una matrice. Siano $R_1, \ldots, R_m$ le sue righe e $C_1, \ldots, C_n$ le sue colonne. Si considerano questi spazi vettoriali:

- $\mathcal{L}(R) = \mathcal{L}(R_1, \ldots, R_m) \subseteq k^n$, detto spazio delle righe di A
- $\mathcal{L}(C) = \mathcal{L}(C_1, \ldots, C_n) \subseteq k^m$, detto spazio delle colonne di A.

La riduzione per righe permette di passare da una matrice A ad una qualsiasi matrice A' ridotta per righe, in modo che lo spazio delle righe di A e quello di A' coincidano.

Le operazioni elementari sulla matrice A consentono di non alterare il suo spazio delle righe e sono:

- scambio di due righe
- moltiplicazione di una riga per uno scalare non nullo, cioè $R_i \longmapsto \lambda R_i$
- sostituzione di una riga con la somma della riga stessa e di un multiplo di un'altra riga, cioè $R_i \longmapsto R_i + \lambda R_j$.

Teorema (Teorema di Kronecker)

Sia $A \in k^{m,n}$ e siano $\mathcal{L}(R)$ e $\mathcal{L}(C)$ il suo spazio delle righe e il suo spazio delle colonne. Allora:

$$\rho(A) = \dim \mathcal{L}(R) = \dim \mathcal{L}(C).$$

Corollario

Sia $A \in k^{n,n}$. Allora i seguenti fatti sono equivalenti:

1. $|A| \neq 0$
2. *A è invertibile*
3. $\rho(A) = n$
4. *le n righe di A sono l.i.*
5. *le n colonne di A sono l.i.*

IMPORTANTE. Grazie al Teorema di Kronecker, è possibile usare il concetto di rango e il procedimento di riduzione di una matrice per:

- verificare se certi vettori sono l.i.
- cercare una base di uno spazio vettoriale, a partire da dei generatori
- cercare le equazioni cartesiane di un sottospazio.

Fare esercizi da 2.20 a 2.47 dal libro di esercizi.

Teorema (Teorema di Rouché-Capelli I)

Un sistema lineare $AX = B$ di tipo $m \times n$ è possibile $\iff \rho(A) = \rho(A|B)$.

DIMOSTRAZIONE.

Proposizione

Sia $AX = 0$ un sistema lineare omogeneo di tipo $m \times n$. L'insieme delle soluzioni è un sottospazio di k^n di dimensione $n - \rho(A)$.

Fare esercizi "Esercizi su generatori, vettori linearmente indipendenti, basi e sottospazi", "Competenze minime UDE2" e "Tutte le competenze UDE2", reperibili su studium.