Testi consigliati e orario di ricevimento

- P. Bonacini, M. G. Cinquegrani, L. Marino, *Algebra lineare: esercizi svolti*, Cavallotto Edizioni, Catania
- P. Bonacini, M. G. Cinquegrani, L. Marino, *Geometria analitica: esercizi svolti*, Cavallotto Edizioni, Catania
- S. Giuffrida, A. Ragusa, *Corso di Algebra Lineare*, Il Cigno Galileo Galilei, Roma
- G. Paxia, *Lezioni di Geometria*, Spazio Libri, Catania, download al link http://www.giuseppepaxia.it/Prof_Paxia/Home.html
- Ricevimento: lunedì e martedì dalle 09:00 alle 10:00 oppure con appuntamento su Microsoft Teams sul team avente codice e1npyfi
- Ufficio: DAU (III blocco), N.41
- tel. 095-7383006
- email: bonacini@dmi.unict.it
- materiale didattico disponibile su sito web: http://www.dmi.unict.it/bonacini/ e studium

Modalità d'esame

- L'esame consta di una prova scritta e di una prova orale.
- La prova scritta è considerata superata se si riporta una votazione di 12/30, svolgendo in maniera adeguata tanto la parte di algebra quanto la parte di geometria. Si acccede alla prova orale se si supera la prova scritta.
- Se la prova scritta viene tenuta in presenza, la durata è di 3 ore. Se la prova scritta viene tenuta online, la durata è di 90 minuti.
- In merito alla prova orale non vi sono differenze se viene tenuta in presenza oppure online.

Programma

Algebra Lineare

Unità Didattica 1. Generalità sugli insiemi, operazioni. Applicazioni tra insiemi, immagine e controimmagine, iniettività, suriettività, applicazioni biettive. Insiemi con operazioni, le principali strutture geometriche: gruppi, anelli, campi. Generalità sulle matrici. Rango. Determinanti e loro proprietà. I teoremi di Laplace*. Inversa di una matrice quadrata. Calcolo dell'inversa di una matrice quadrata. Teorema di Binet*. Matrici ridotte e metodo di riduzione. Prodotto di matrici. Sistemi lineari, Teorema di Rouché-Capelli. Risoluzione dei sistemi lineari col metodo di riduzione (di Gauss), incognite libere. Sistemi omogenei. Teorema di Cramer.

Unità Didattica 2. Spazi vettoriali e loro proprietà. Esempi. Sottospazi. Intersezione, unione e somma di sottospazi. Indipendenza lineare, relativo criterio. Generatori di uno spazio. Base di uno spazio, metodo degli scarti successivi, completamento ad una base. Lemma di Steinitz*, dimensione di uno spazio vettoriale. Formula di Grassmann*. Somme dirette. Teorema di Kronecker. Dimostrazione del Teorema di Rouché-Capelli. Sistemi omogenei e sottospazio delle soluzioni.

Unità Didattica 3. Applicazioni lineari e loro proprietà. Nucleo ed immagine di un'applicazione lineare. Iniettività, suriettività, isomorfismi. Lo spazio $L(V, W)$, suo isomorfismo* con $K^{m,n}$. Studio delle applicazioni lineari. Cambio di base, matrici simili.

Unità Didattica 4. Autovalori, autovettori ed autospazi di un endomorfismo. Polinomio caratteristico. Dimensione degli autospazi. Indipendenza degli autovettori. Endomorfismi semplici e diagonalizzazione di matrici.

Geometria

Unità Didattica 5. I vettori dello spazio ordinario. Somma di vettori, prodotto di un numero per un vettore. Prodotto scalare, prodotto vettoriale, prodotto misto. Componenti dei vettori ed operazioni mediante componenti. Geometria lineare nello spazio. Coordinate cartesiane e coordinate omogenee. I piani e loro equazioni. Le rette, loro rappresentazione. Elementi impropri. Proprietà angolari di rette e piani. Distanze. Fasci di piani. Geometria lineare nel piano. Coordinate cartesiane e coordinate omogenee. Rette e loro equazioni. Intersezioni tra rette. Coefficiente angolare. Distanze. Fasci di rette.

Unità Didattica 6. Cambiamenti di coordinate nel piano, rotazioni e traslazioni. Coniche e matrici associate, invarianti ortogonali. Equazioni ridotte, riduzione di una conica a forma canonica. Classificazione delle coniche irriducibili. Studio delle coniche in forma canonica. Circonferenze. Rette tangenti. Fasci di coniche e loro uso per determinare coniche particolari.

Unità Didattica 7. Quadriche nello spazio e matrici associate. Quadriche irriducibili. Vertici e quadriche degeneri. Coni e cilindri, loro sezioni. Equazioni ridotte, riduzione di una quadrica a forma canonica. Classificazione delle quadriche non degeneri. Sezioni di quadriche con rette e piani. Rette e piani tangenti.

Applicazioni

Definizione

Diremo applicazione (o funzione) da un insieme A ad un insieme B una legge f che associa ad ogni elemento $a \in A$ uno ed un solo elemento $b \in B$.

Scriviamo $f\colon A \to B$ e il corrispondente o immagine di $a \in A$ è indicato con $f(a)$. A è detto dominio di f e B codominio di f.

Due applicazioni f e g coincidono se hanno stesso dominio, stesso codominio e se $f(a) = g(a)\ \forall a \in A$.

Definizione

Se $f\colon A \to B$ è un'applicazione, chiamiamo immagine di f il sottoinsieme di B costituito dalle immagini di tutti gli elementi di A e scriviamo:

$$\operatorname{Im} f = \{b \in B \mid \exists a \in A \text{ tale che } f(a) = b\}.$$

Un'applicazione $f\colon A \to B$ si dice suriettiva se $\operatorname{Im} f = B$, cioè se ogni elemento $b \in B$ è immagine di qualche elemento $a \in A$.

Definizione

Un'applicazione $f\colon A \to B$ si dice iniettiva se per ogni $x, y \in A$, con $x \neq y$, si ha $f(x) \neq f(y)$, cioè se f associa ad elementi distinti di A elementi distinti di B.

Equivalentemente, se f è iniettiva si ha:

$$f(x) = f(y) \Rightarrow x = y.$$

Definizione

Un'applicazione si dice biettiva (o corrispondenza biunivoca) se è sia iniettiva che suriettiva.

Definizione

Dato un insieme A, l'applicazione $i_A\colon A \to A$ definita da $i_A(a) = a$ per ogni $a \in A$ si chiama applicazione identica su A.

i_A è un'applicazione sia iniettiva che suriettiva, cioè è biettiva.

Definizione

Date due applicazioni $f\colon A \to B$ e $g\colon B \to C$, chiamiamo applicazione composta di f e g (o composizione di f e g) l'applicazione $g \circ f\colon A \to C$ definita da:

$$(g \circ f)(a) = g(f(a)) \quad \forall a \in A.$$

Definizione

Se $f\colon A \to B$ è un'applicazione biettiva, l'applicazione che associa ad ogni elemento di B l'unico elemento di A da cui proviene mediante f è detta applicazione inversa di f e si indica con $f^{-1}\colon B \to A$.

Allora per ogni $b \in B$ $f^{-1}(b) = a$, dove a è l'unico elemento di A tale che $f(a) = b$. Inoltre, $f \circ f^{-1} = i_B$ e $f^{-1} \circ f = i_A$.

Operazioni su insiemi

Definizione

Dati due insiemi A e B chiamiamo prodotto cartesiano di A e B, e scriviamo $A \times B$, l'insieme costituito dalle coppie ordinate aventi il primo elemento in A e il secondo in B, cioè:

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A,\ b \in B\}.$$

Si pone $A \times A = A^2$ e il piano cartesiano si identifica con $\mathbb{R}^2$.

Definizione

Un'operazione definita su un insieme A è un'applicazione $A \times A \to A$. L'immagine di una coppia (a, b) è indicata con $a \star b$.

Definizione

Un'operazione $\star$ su un insieme G è:

1. associativa se $(a \star b) \star c = a \star (b \star c)$, per ogni $a, b, c \in G$
2. commutativa se $a \star b = b \star a$ per ogni $a, b \in G$.

Definizione

Sia G un insieme su cui è definita un'operazione $\star$. Un elemento $e \in G$ è detto elemento unità o elemento neutro se per ogni $a \in G$ si ha $a \star e = e \star a = a$.

Definizione

Sia G un insieme su cui è definita un'operazione $\star$ che ammette l'elemento neutro e. Un elemento $a \in G$ si dice invertibile se esiste $a' \in G$ tale che $a \star a' = a' \star a = e$.

Definizione

Sia G un insieme su cui è definita un'operazione $\star$. Diremo che $(G, \star)$ è un gruppo se:

1. $\star$ è associativa
2. esiste l'elemento neutro e
3. ogni elemento è invertibile.

Se vale la proprietà commutativa, il gruppo è detto abeliano.

Definizione

Sia A un insieme su cui sono definite sue operazioni, che indichiamo con $+$ e $\cdot$. $(A, +, \cdot)$ è un anello se:

1. $(A, +)$ è un gruppo abeliano
2. $\cdot$ è associativa
3. per ogni $a, b, c \in A$ si ha:
   - $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$
   - $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$.

Se $(A, \cdot)$ è commutativo, l'anello è detto commutativo.

Proposizione

Sia $(A, +, \cdot)$ un anello. Allora:

1. *se $a \in A$, si ha $a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0$*
2. *se $a, b \in A$, si ha $(-a) \cdot b = a \cdot (-b) = -(a \cdot b)$.*

Definizione

Un anello commutativo $(A, +, \cdot)$ con l'unità, ovvero dotato dell'elemento neutro 1 rispetto all'operazione $\cdot$, è detto campo se ogni elemento non nullo è invertibile.

Calcolo vettoriale

Ci poniamo nello spazio ordinario S, in cui valgono gli assiomi della geometria euclidea. I vettori vengono rappresentati mediante frecce, con un punto iniziale e un punto finale. Si usa la notazione $\overrightarrow{AB}$, dove A è il punto iniziale o punto di applicazione e B è il punto finale. $\overrightarrow{AB}$ è anche detto vettore applicato in A. Il modulo del vettore $\overrightarrow{AB}$ è la lunghezza $\overline{AB}$.

Definizione

Diciamo equivalenti due vettori paralleli, aventi stesso modulo e stesso verso.

In questo modo, l'insieme dei vettori applicati dello spazio S viene ripartito in tante classi, in ognuna delle quali vi sono i vettori applicati paralleli, con stesso modulo e verso. Ognuna di queste classi è detta vettore libero.

Se $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$ è un vettore libero, allora scriviamo anche $\vec{v} = B - A$. Se $\overrightarrow{CD}$ è un altro vettore applicato equivalente a $\overrightarrow{AB}$, si può anche scrivere $\vec{v} = D - C$.

Il modulo di $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$ è $|v| = \overline{AB}$. Il vettore libero $A - A = \vec{0}$ è il vettore nullo. Ha modulo 0, ma direzione e verso sono indeterminati. È l'unico vettore ad avere modulo 0.

Se fissiamo un qualunque punto O dello spazio, per ogni vettore libero $\vec{v}$ esiste uno ed un solo rappresentante di $\vec{v}$ applicato in O.

Operazioni sui vettori

Definizione

Siano $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$ e $\vec{w} = \overrightarrow{BC}$ due vettori liberi. La somma dei vettori è:

$$\vec{v} + \vec{w} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}.$$

Si può anche scrivere:

$$\vec{v} + \vec{w} = (B - A) + (C - B) = C - A.$$

Dati tre vettori liberi $\vec{v}$, $\vec{w}$, $\vec{z}$, si ha:

$$\vec{v} + \vec{w} = \vec{w} + \vec{v},$$

cioè vale la proprietà commutativa. Inoltre, $\vec{0}$ è l'elemento neutro della somma e ogni vettore $\vec{v}$ ammette l'opposto $-\vec{v}$.

Vale la proprietà associativa:

$$(\vec{v}+\vec{w})+\vec{z}=\vec{v}+(\vec{w}+\vec{z})$$

Infatti:

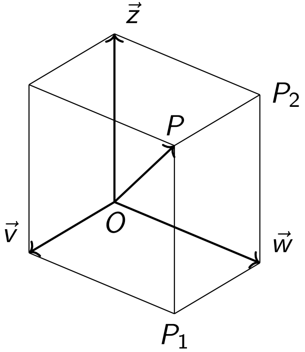


Figura: $(\vec{v}+\vec{w})+\vec{z}=\vec{v}+(\vec{w}+\vec{z})=\overrightarrow{OP}$

Dunque, l'insieme V dei vettori liberi dello spazio costituisce un gruppo abeliano.

Siano $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$ un vettore libero e $a \in \mathbb{R}$. Vogliamo definire il prodotto $a\vec{v}$, che sarà un vettore.

Definizione

Il vettore $a\vec{v}$ ha modulo $|a| \cdot |\vec{v}|$. Se questo numero è 0, allora $a\vec{v} = \vec{0}$. Altrimenti, $a\vec{v}$ è il vettore libero rappresentato dai vettori applicati paralleli al vettore applicato $\overrightarrow{AB}$ e verso concorde con quello di $\overrightarrow{AB}$ per $a > 0$, opposto per $a < 0$.

Proposizione

Siano $a, b \in \mathbb{R}$ e $\vec{v}, \vec{w}$ vettori liberi. Allora:

1. $(a + b)\vec{v} = a\vec{v} + b\vec{v}$
2. $a(\vec{v} + \vec{w}) = a\vec{v} + a\vec{w}$
3. $a(b\vec{v}) = (ab)\vec{v}$
4. $1 \cdot \vec{v} = \vec{v}$.

L'insieme V dei vettori liberi dello spazio è un gruppo abeliano rispetto alla somma ed è dotato di un prodotto esterno che gode di queste proprietà: si dice che V è uno spazio vettoriale.

Proposizione (Condizione di parallelismo tra vettori liberi)

Due vettori liberi non nulli $\vec{v}$ *e* $\vec{w}$ *sono paralleli* $\Leftrightarrow$ *esiste uno scalare* $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ *tale che* $\vec{v} = \lambda \vec{w}$.

DIMOSTRAZIONE

Siano $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$ e $\vec{w} = \overrightarrow{AC}$ due vettori liberi. L'angolo $\widehat{\vec{v}\vec{w}}$ è l'angolo convesso formato dai due vettori.

Definizione

Dati due vettori liberi $\vec{v}$ e $\vec{w}$, il prodotto scalare $\vec{v} \cdot \vec{w}$ è un numero definito in questo modo:

- è 0 se $\vec{v} = \vec{0}$ o $\vec{w} = \vec{0}$
- se $\vec{v}, \vec{w} \neq \vec{0}$, allora $\vec{v} \cdot \vec{w} = |\vec{v}| \cdot |\vec{w}| \cos \widehat{\vec{v}\vec{w}}$.

Osserviamo che $\vec{v} \cdot \vec{w} = \vec{w} \cdot \vec{v}$, cioè per il prodotto scalare vale la proprietà commutativa. Se $\vec{v}, \vec{w} \neq \vec{0}$, allora $\vec{v} \perp \vec{w} \Leftrightarrow \vec{v} \cdot \vec{w} = 0$. Con la convenzione di considerare il vettore nullo ortogonale ad ogni vettore, si può dire che due vettori liberi $\vec{v}$ e $\vec{w}$ sono ortogonali $\Leftrightarrow \vec{v} \cdot \vec{w} = 0$.

Proposizione

Dati $a \in \mathbb{R}$ e $\vec{v}, \vec{w}, \vec{z}$ vettori liberi, si ha:

1. $(a\vec{v}) \cdot \vec{w} = a(\vec{v} \cdot \vec{w})$
2. $\vec{v} \cdot (\vec{w} + \vec{z}) = \vec{v} \cdot \vec{w} + \vec{v} \cdot \vec{z}$.

Definizione

Dati due vettori liberi $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$ e $\vec{w} = \overrightarrow{AC}$, il prodotto vettoriale $\vec{v} \wedge \vec{w}$ è un vettore di modulo $|\vec{v}| \cdot |\vec{w}| \operatorname{sen} \widehat{\vec{v}\vec{w}}$. Se questo numero è 0, allora poniamo $\vec{v} \wedge \vec{w} = \vec{0}$. Altrimenti, $\vec{v} \wedge \vec{w}$ ha direzione ortogonale al piano individuato dai vettori $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$. Per quel che riguarda il verso, se si guarda il piano individuato da $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$ dalla parte in cui si trova $\vec{v} \wedge \vec{w}$, $\vec{v}$ per sovrapporsi a $\vec{w}$ deve percorrere l'angolo $\widehat{\vec{v}\vec{w}}$ in senso antiorario.

Osserviamo che $\vec{v} \wedge \vec{w} = -\vec{w} \wedge \vec{v}$, cioè per il prodotto vettoriale non vale la proprietà commutativa. Inoltre, per due vettori non nulli $\vec{v}$ e $\vec{w}$ si ha $\vec{v} \parallel \vec{w} \Leftrightarrow \vec{v} \wedge \vec{w} = \vec{0}$.

Proposizione

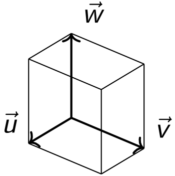
Dati $a \in \mathbb{R}$ e $\vec{v}, \vec{w}, \vec{z}$ vettori liberi, si ha:

1. $(a\vec{v}) \wedge \vec{w} = a(\vec{v} \wedge \vec{w})$
2. $\vec{v} \wedge (\vec{w} + \vec{z}) = \vec{v} \wedge \vec{w} + \vec{v} \wedge \vec{z}$.

Il prodotto misto di tre vettori liberi $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ è $\vec{u} \cdot \vec{v} \wedge \vec{w}$.

Proposizione

Il valore assoluto del prodotto misto $|\vec{u} \cdot \vec{v} \wedge \vec{w}|$ rappresenta il volume del parallelepipedo costruito sui tre vettori. Dunque, condizione necessaria e sufficiente perché tre vettori $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ siano complanari è che $\vec{u} \cdot \vec{v} \wedge \vec{w} = 0$.



Definizione

Chiamiamo versore un vettore di modulo unitario.

Se $\vec{v}$ è un vettore, allora $\vec{v} \cdot \vec{v} = |\vec{v}| \cdot |\vec{v}| \cos 0 = |\vec{v}|^2$. In particolare, se $\vec{v}$ è un versore $\vec{v} \cdot \vec{v} = 1$.

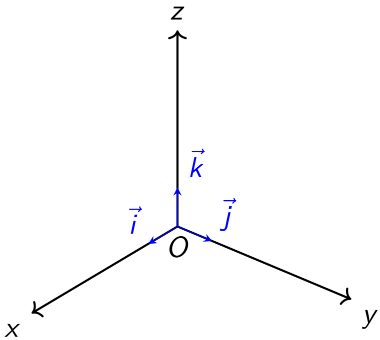
Proposizione

Sia $\vec{r}$ una retta orientata e sia $\vec{i}$ un versore su $\vec{r}$ avente lo stesso verso di $\vec{r}$. Allora $\vec{v} \cdot \vec{i}$ è pari alla lunghezza con segno del segmento proiezione di $\vec{v}$ su $\vec{r}$. In particolare, il vettore $(\vec{v} \cdot \vec{i})\vec{i}$ è la proiezione ortogonale di $\vec{v}$ sulla retta $\vec{r}$.

Proposizione (Scomposizione di vettori)

Siano $\vec{u}$ e $\vec{v}$ vettori non nulli. Allora esistono $\vec{u}_1, \vec{u}_2$, con $\vec{u}_1 \parallel \vec{v}$ e $\vec{u}_2 \perp \vec{v}$, tali che $\vec{u} = \vec{u}_1 + \vec{u}_2$.

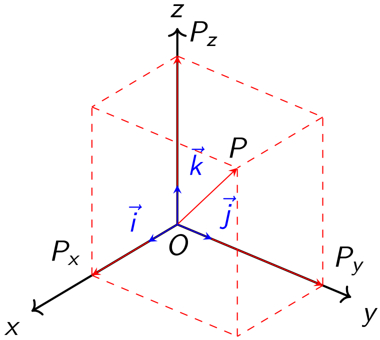
Nello spazio ordinario S assegnare un sistema di riferimento cartesiano ortogonale significa assegnare un punto O, origine delle coordinate, un'unità di misura u e tre rette orientate $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$ passanti per O, a due a due perpendicolari e tali che i versori $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ che ne determinano l'orientamento siano tali che $\vec{k} = \vec{i} \wedge \vec{j}$.



Ad un punto P dello spazio associamo una terna ordinata di numeri reali (x, y, z), che si dicono coordinate cartesiane di P.

Consideriamo il vettore libero $\vec{v} = \overrightarrow{OP}$. Siano P_x, P_y, P_z le proiezioni ortogonali di P sui tre assi cartesiani. $\vec{v}$ è la diagonale del parallelepipedo costruito su $\overrightarrow{OP_x}, \overrightarrow{OP_y}, \overrightarrow{OP_z}$, per cui:

$$\vec{v} = \overrightarrow{OP_x} + \overrightarrow{OP_y} + \overrightarrow{OP_z}.$$



$\overrightarrow{OP_x}, \overrightarrow{OP_y}, \overrightarrow{OP_z}$ sono le proiezioni ortogonali di $\vec{v}$ sugli assi $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$, per cui:

$$\overrightarrow{OP_x} = (\vec{v} \cdot \vec{i})\vec{i}$$

$$\overrightarrow{OP_y} = (\vec{v} \cdot \vec{j})\vec{j}$$

$$\overrightarrow{OP_z} = (\vec{v} \cdot \vec{k})\vec{k}$$

$$\Rightarrow \vec{v} = (\vec{v} \cdot \vec{i})\vec{i} + (\vec{v} \cdot \vec{j})\vec{j} + (\vec{v} \cdot \vec{k})\vec{k}.$$

$\vec{v} = (\vec{v} \cdot \vec{i})\vec{i} + (\vec{v} \cdot \vec{j})\vec{j} + (\vec{v} \cdot \vec{k})\vec{k}$, dove $\vec{v} \cdot \vec{i}$, $\vec{v} \cdot \vec{j}$, $\vec{v} \cdot \vec{k}$ sono le coordinate del punto P e sono anche dette componenti del vettore $\vec{v}$. Poniamo $\vec{v} \cdot \vec{i} = v_x$, $\vec{v} \cdot \vec{j} = v_y$, $\vec{v} \cdot \vec{k} = v_z$, per cui:

$$\vec{v} = v_x \vec{i} + v_y \vec{j} + v_z \vec{k}$$

e le componenti di $\vec{v}$ sono (v_x, v_y, v_z). Inoltre, $|\vec{v}| = \sqrt{v_x^2 + {v_y}^2 + {v_z}^2}$. Se $P_1 = (x_1, y_1, z_1)$ e $P_2 = (x_2, y_2, z_2)$, allora:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{P_1P_2} = \overrightarrow{OP_2} - \overrightarrow{OP_1} = x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k} - (x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}) = \\ = (x_2 - x_1)\vec{i} + (y_2 - y_1)\vec{j} + (z_2 - z_1)\vec{k}. \end{aligned}$$

$$|\overline{P_1P_2}| = |\overrightarrow{P_1P_2}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

Se $\vec{v} = v_x\vec{i} + v_y\vec{j} + v_z\vec{k}$ e $\vec{w} = w_x\vec{i} + w_y\vec{j} + w_z\vec{k}$, allora:

$$\vec{v}+\vec{w} = v_x\vec{i}+v_y\vec{j}+v_z\vec{k}+w_x\vec{i}+w_y\vec{j}+w_z\vec{k} = (v_x+w_x)\vec{i}+(v_y+w_y)\vec{j}+(v_z+w_z)\vec{k}.$$

Se $a \in \mathbb{R}$, allora:

$$a\vec{v} = a(v_x\vec{i} + v_y\vec{j} + v_z\vec{k}) = (av_x)\vec{i} + (av_y)\vec{j} + (av_z)\vec{k}.$$

Inoltre:

$$\begin{aligned}\vec{v} \cdot \vec{w} &= (v_x\vec{i} + v_y\vec{j} + v_z\vec{k}) \cdot (w_x\vec{i} + w_y\vec{j} + w_z\vec{k}) = \\ &= v_x w_x\vec{i} \cdot \vec{i} + v_x w_y\vec{i} \cdot \vec{j} + v_x w_z\vec{i} \cdot \vec{k} + v_y w_x\vec{j} \cdot \vec{i} + v_y w_y\vec{j} \cdot \vec{j} + v_y w_z\vec{j} \cdot \vec{k}+ \\ &\qquad + v_z w_x\vec{k} \cdot \vec{i} + v_z w_y\vec{k} \cdot \vec{j} + v_z w_z\vec{k} \cdot \vec{k}.\end{aligned}$$

Ma dal momento che $\vec{i} \cdot \vec{j} = \vec{i} \cdot \vec{k} = \vec{j} \cdot \vec{k} = 0$ e $\vec{i} \cdot \vec{i} = \vec{j} \cdot \vec{j} = \vec{k} \cdot \vec{k} = 1$, si ha:

$$\vec{v} \cdot \vec{w} = v_x w_x + v_y w_y + v_z w_z.$$

Se $\vec{v}, \vec{w} \neq \vec{0}$, allora:

$$\cos \widehat{\vec{v}\vec{w}} = \frac{\vec{v} \cdot \vec{w}}{|\vec{v}| \cdot |\vec{w}|} = \frac{v_x w_x + v_y w_y + v_z w_z}{\sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}\sqrt{w_x^2 + w_y^2 + w_z^2}}$$

In particolare, $\vec{v} \perp \vec{w} \Leftrightarrow v_x w_x + v_y w_y + v_z w_z = 0$. Notiamo che:

$$\cos \widehat{\vec{v}\vec{i}} = \frac{v_x}{\sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}}, \quad \cos \widehat{\vec{v}\vec{j}} = \frac{v_y}{\sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}},$$

$$\cos \widehat{\vec{v}\vec{k}} = \frac{v_z}{\sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}}.$$

Questi numeri sono detti coseni direttori di $\vec{v}$ e si ha
$\cos^2 \widehat{\vec{v}\vec{i}} + \cos^2 \widehat{\vec{v}\vec{j}} + \cos^2 \widehat{\vec{v}\vec{k}} = 1$.

Dato che $\vec{i} \wedge \vec{j} = \vec{k}$, $\vec{k} \wedge \vec{i} = \vec{j}$, $\vec{j} \wedge \vec{k} = \vec{i}$ e $\vec{i} \wedge \vec{i} = \vec{j} \wedge \vec{j} = \vec{k} \wedge \vec{k} = \vec{0}$, allora:

$$\begin{aligned}\vec{v} \wedge \vec{w} &= (v_y w_z - v_z w_y)\vec{i} + (w_x v_z - v_x w_z)\vec{j} + (v_x w_y - v_y w_x)\vec{k} = \\ &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ v_x & v_y & v_z \\ w_x & w_y & w_z \end{vmatrix}\end{aligned}$$

Se $\vec{u} = u_x \vec{i} + u_y \vec{j} + u_z \vec{k}$, allora:

$$\begin{aligned}\vec{u} \cdot \vec{v} \wedge \vec{w} &= (v_y w_z - v_z w_y)u_x + (w_x v_z - v_x w_z)u_y + (v_x w_y - v_y w_x)u_z = \\ &= \begin{vmatrix} u_x & u_y & u_z \\ v_x & v_y & v_z \\ w_x & w_y & w_z \end{vmatrix}\end{aligned}$$

Sistema di riferimento nel piano

Nello piano assegnare un sistema di riferimento cartesiano ortogonale significa assegnare un punto O, origine delle coordinate, un'unità di misura u e due rette orientate $\vec{x}, \vec{y}$ passanti per O perpendicolari tra loro. Quindi, i versori $\vec{i}$ e $\vec{j}$ che ne determinano l'orientamento sono tali che $\vec{i} \cdot \vec{j} = 0$.
Ad un punto P dello spazio associamo una coppia ordinata di numeri reali (x, y), che si dicono coordinate cartesiane di P.
Consideriamo il vettore libero $\vec{v} = \overrightarrow{OP}$. Siano P_x e P_y le proiezioni ortogonali di P sui due assi cartesiani. Allora: $\vec{v}$ è la diagonale del parallelogramma individuato da $\overrightarrow{OP_x}$ e $\overrightarrow{OP_y}$, per cui:

$$\vec{v} = \overrightarrow{OP_x} + \overrightarrow{OP_y} = v_x\vec{i} + v_y\vec{j}.$$

Tutte le operazioni tra vettori (somma, prodotto di uno scalare per un vettore e prodotto scalare) si effettuano mediante le componenti.

Definizione

Sia k un campo e sia V un insieme. Diremo che V è un k-spazio vettoriale se sono definite due operazioni in V, una di somma $+\colon V \times V \to V$ e una di prodotto esterno $\cdot\colon k \times V \to V$, tali che $(V, +)$ sia un gruppo abeliano e il prodotto esterno goda delle seguenti proprietà:

1. $(ab)v = a(bv)$, $\forall a, b \in k$ e $\forall v \in V$
2. $(a + b)v = av + bv$, $\forall a, b \in k$ e $\forall v \in V$
3. $a(v + w) = av + aw$, $\forall a \in k$ e $\forall v, w \in V$
4. $1 \cdot v = v$, $\forall v \in V$.

Gli elementi di V sono detti vettori e quelli di k sono detti scalari.

L'insieme dei vettori liberi dello spazio ordinario è un $\mathbb{R}$-spazio vettoriale. Essi possono essere rappresentati mediante terne di numeri reali, cioè le loro componenti. In tal caso, le operazioni sulle componenti sono:

$$a \cdot (x, y, z) = (ax, ay, az)$$
$$(x_1, y_1, z_1) + (x_2, y_2, z_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2).$$

Se consideriamo l'insieme delle n-uple ordinate di elementi di k, cioè:

$$k^n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \mid x_1, x_2, \ldots, x_n \in k\},$$

allora k^n è un k-spazio vettoriale con queste operazioni:

$$a \cdot (x_1, x_2, \ldots, x_n) = (ax_1, ax_2, \ldots, ax_n)$$
$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) + (y_1, y_2, \ldots, y_n) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n).$$

I vettori $e_1 = (1, 0, \ldots, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0, \ldots, 0)$, $\ldots$, $e_n = (0, 0, \ldots, 0, 1)$ formano quella che sia chiama base canonica di k^n, in quanto $\forall (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in k^n$ si ha:

$$\begin{aligned}(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= (x_1, 0, \ldots, 0) + (0, x_2, 0, \ldots, 0) + \cdots + (0, 0, \ldots, 0, x_n) = \\ &= x_1(1, 0, \ldots, 0) + x_2(0, 1, 0, \ldots, 0) + \cdots + x_n(0, 0, \ldots, 0, 1) = \\ &= x_1 e_1 + x_2 e_2 + \cdots + x_n e_n.\end{aligned}$$

$\mathbb{C}$ è un $\mathbb{R}$-spazio vettoriale, con le operazioni di somma di numeri complessi e di prodotto di un numero reale per un numero complesso. Dato che i numeri complessi sono in corrispondenza con le coppie di numeri reali, $\mathbb{C}$ è spesso identificato con $\mathbb{R}^2$ come $\mathbb{R}$-spazio vettoriale.

Definizione

Sia k un campo. Una tabella del tipo:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

dove gli $a_{ij} \in k$ si dice matrice di tipo $m \times n$ su k. L'insieme delle matrici $m \times n$ su k si indica con $k^{m,n}$.

$(a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n})$, $(a_{21}, a_{22}, \dots, a_{2n})$,...,$(a_{m1}, a_{m2}, \dots, a_{mn})$ sono m n-uple di elementi di k dette righe della matrice.

$(a_{11}, a_{21}, \dots, a_{m1})$, $(a_{12}, a_{22}, \dots, a_{m2})$,...,$(a_{1n}, a_{2n}, \dots, a_{mn})$ sono n m-uple di elementi di k dette colonne della matrice.

Una matrice si indica anche con $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}}$ o $A = (a_{ij})$ o ancora:

$$A = \begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \\ \dots \\ R_m \end{pmatrix} \quad \text{o} \quad A = \begin{pmatrix} C_1 & C_2 & \dots & C_n \end{pmatrix}.$$

Se $m = n$, la matrice A si dirà quadrata di ordine n.

Definizione

Siano $A = (a_{ij})$ e $B = (b_{ij})$ matrici di $k^{m,n}$. Diremo somma tra A e B la matrice:

$$A + B = (a_{ij} + b_{ij}), \quad \forall i = 1, \dots, m,\ j = 1, \dots, n,$$

cioè la matrice ottenuta sommando gli elementi di A e di B che stanno nella stessa riga e colonna.

Proposizione

$k^{m,n}$ è un gruppo abeliano rispetto alla somma.

Dotiamo $k^{m,n}$ di un prodotto esterno. Se $b \in K$ e $A = (a_{ij}) \in k^{m,n}$, poniamo:

$$b \cdot A = (b \cdot a_{ij}),$$

cioè:

$$b \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \cdot a_{11} & b \cdot a_{12} & \dots & b \cdot a_{1n} \\ b \cdot a_{21} & b \cdot a_{22} & \dots & b \cdot a_{2n} \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ b \cdot a_{m1} & b \cdot a_{m2} & \dots & b \cdot a_{mn} \end{pmatrix}$$

$k^{m,n}$ con queste operazioni di somma e di prodotto esterno è un k-spazio vettoriale.

Consideriamo le matrici:

$$E_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \dots, E_{1n} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \dots,$$

$$E_{m1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ 1 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \dots, E_{mn} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

$E_{11}, E_{12}, \dots, E_{1n}, E_{21}, E_{22}, \dots, E_{2n}, \dots, E_{m1}, E_{m2}, \dots, E_{mn}$ costituiscono la base standard di $k^{m,n}$, in quanto se $A = (a_{ij}) \in k^{m,n}$, allora:

$$A = a_{11}E_{11} + a_{12}E_{12} + \dots + a_{mn}E_{mn}.$$

Sia k un campo e sia $k[x]$ l'insieme dei polinomi a coefficienti in k:

$$k[x] = \{a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n \mid n \geq 0,\ a_0, a_1, \ldots, a_n \in k\}.$$

$k[x]$ è un k-spazio vettoriale con le usuali operazioni di somma di polinomi e di prodotto di un numero per un polinomio. Consideriamo anche questo sottoinsieme di $k[x]$:

$$k[x]_r = \{a_0 + a_1 x + \cdots + a_r x^r \mid a_0, a_1, \ldots, a_r \in k\},$$

cioè l'insieme dei polinomio di grado al massimo r. Si vede che $k[x]_r$ è anch'esso un k-spazio vettoriale, perché la somma di due polinomi di grado al massimo r ha ancora grado al massimo r e il prodotto di un polinomio di grado al massimo r per un numero è ancora un polinomio di grado al massimo r. La base standard di $k[x]_r$ è formata da $1, x, \ldots, x^r$, in quanto, se $a_0 + a_1 x + \cdots + a_r x^r \in k[x]_r$, allora:

$$a_0 + a_1 x + \cdots + a_r x^r = a_0 \cdot 1 + a_1 \cdot x + \ldots a_r \cdot x^r.$$

Proposizione

Sia V un k-s.v. (spazio vettoriale). Siano $a \in k$ e $v \in V$.

1. $a \cdot (-v) = (-a) \cdot v = -(a \cdot v)$
2. $a \cdot v = 0_v \iff a = 0$ *oppure* $v = 0_v$.

Definizione

Sia V un k-s.v. e sia $U \subseteq V$, con $U \neq \emptyset$. Diremo che U è un sottospazio di V se U è esso stesso un k-s.v. rispetto alle operazioni di V.

I sottospazi banali di V sono $\{0_v\}$ e V stesso. $\{0_v\}$ è detto sottospazio nullo. I sottospazi diversi da $\{0_v\}$ e da V sono detti propri.

Proposizione

Sia V un k-s.v. e sia $U \subseteq V$. U è un sottospazio di $V \iff$ se sono verificate le seguenti condizioni:

1. *$\forall u, u' \in U$ si ha $u + u' \in U$, cioè U è chiuso rispetto alla somma*
2. *$\forall a \in k$, $\forall u \in U$ si ha $a \cdot u \in U$, cioè U è chiuso rispetto al prodotto esterno.*

DIMOSTRAZIONE.

Notiamo che i sottoinsiemi di V che non contengono il vettore 0_V non sono sottospazi. Infatti, $\forall u \in U$ si ha $0_V = 0 \cdot u \in U$.

Come sono fatti sottospazi di k^n? Sia

$$U = \{(x_1, \ldots, x_n) \in k^n \mid f_1(x_1, \ldots, x_n) = 0, \ldots, f_r(x_1, \ldots, x_n) = 0\},$$

con $f_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, f_r(x_1, \ldots, x_n)$ polinomi. Allora U è un sottospazio di $k^n \iff f_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, f_r(x_1, \ldots, x_n)$ sono polinomi lineari e omogenei. $f_1(x_1, \ldots, x_n) = 0, \ldots, f_r(x_1, \ldots, x_n) = 0$ sono dette equazioni cartesiane di U.

Un sottospazio di k^n può anche essere dato assegnando il suo vettore generico.

Fare esercizi da 2.12 a 2.19 dal libro di esercizi.

Definizione

Una matrice quadrata $A \in k^{n,n}$ si dice diagonale se $a_{ij} = 0$ per $i \neq j$, cioè:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Definizione

Sia $A = (a_{ij}) \in k^{m,n}$. Si chiama trasposta di A la matrice di $k^{n,m}$ ottenuta scambiando a_{ij} con a_{ji} per ogni i, j, cioè ${}^{t}A = (a_{ji})$.

Proposizione

Sia $A \in k^{m,n}$. Allora:

1. ${}^{t}({}^{t}A) = A$
2. ${}^{t}(A + B) = {}^{t}A + {}^{t}B$.

Definizione

Una matrice A è detta simmetrica se ${}^{t}A = A$. È detta antisimmetrica se ${}^{t}A = -A$.

Definizione

Siano $A = (a_{ij}) \in k^{m,n}$ e $B = (b_{ij}) \in k^{n,p}$. Definiamo il prodotto righe per colonne $A \cdot B \in k^{m,p}$ la matrice così ottenuta:

$$A \cdot B = (c_{ij}), \quad i = 1, \dots, m, \, j = 1, \dots, p,$$

con $c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{in}b_{nj}$. L'elemento di posto i, j è la somma dei prodotti degli elementi della i-esima riga di A per gli elementi della j-esima colonna di B.

Proposizione

Siano $A \in k^{m,n}$ e $B \in k^{n,p}$. Allora ${}^{t}(A \cdot B) = {}^{t}B \cdot {}^{t}A$.

Fare esercizi 1.1 e 1.2 dal libro di esercizi di algebra lineare.

Determinante di una matrice

Il determinante di una matrice è un numero e si definisce solo per le matrici quadrate, cioè quelle che hanno lo stesso numero di righe e di colonne.

Sia

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

una matrice quadrata di ordine 2. Allora il determinante di A, che si indica con $\det A$ o $|A|$, è il numero:

$$\det A = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Sia

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

una matrice quadrata di ordine 3. Il determinante di A è il numero:

$$|A| = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}.$$

Ci sono due metodi mnemonici, dovuti a Sarrus, per ricordare la regola:

$$|A| = \begin{pmatrix} {\color{red}a_{11}} & {\color{blue}a_{12}} & {\color{green}a_{13}} \\ {\color{green}a_{21}} & {\color{red}a_{22}} & {\color{blue}a_{23}} \\ {\color{blue}a_{31}} & {\color{green}a_{32}} & {\color{red}a_{33}} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} {\color{green}a_{11}} & {\color{blue}a_{12}} & {\color{red}a_{13}} \\ {\color{blue}a_{21}} & {\color{red}a_{22}} & {\color{green}a_{23}} \\ {\color{red}a_{31}} & {\color{green}a_{32}} & {\color{blue}a_{33}} \end{pmatrix}$$

$$|A| = \left| \begin{array}{ccc|cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{array} \right. \quad - \quad \left| \begin{array}{ccc|cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{array} \right.$$

Per definire il determinante di una matrice quadrata di ordine superiore abbiamo bisogno di questa definizione:

Definizione

Sia $A = (a_{ij})$ una matrice quadrata di ordine n. Diremo complemento algebrico di posto (i, j), e si indica con A_{ij}, il prodotto di $(-1)^{i+j}$ e del determinante della matrice quadrata di ordine $n - 1$ ottenuta da A sopprimendo la i-esima riga e la j-esima colonna.

Teorema (Primo teorema di Laplace)

Sia $A = (a_{ij})$ una matrice quadrata di ordine n. La somma dei prodotti degli elementi di una riga (o colonna) per i rispettivi complementi algebrici è uguale al determinante di A, cioè:

$$|A| = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} A_{ij} \quad \forall i = 1, \dots, n$$

$$\left(|A| = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} A_{ij} \quad \forall j = 1, \dots, n \right)$$

Teorema (Secondo teorema di Laplace)

Sia $A = (a_{ij})$ una matrice quadrata di ordine n. La somma dei prodotti degli elementi di una riga (o colonna) per i complementi algebrici di un'altra riga o (colonna) è uguale a 0, cioè:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} A_{hj} = 0 \quad \forall i \neq h$$

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_{ij} A_{ik} \quad \forall j \neq k \right)$$

Fare esercizi 1.3, 1.4, 1.5 e 1.6.

Proposizione

Sia $A \in k^{n,n}$.

1. $|A| = |{}^tA|$.
2. *Se una riga (o colonna) di A è nulla* $\Longrightarrow |A| = 0$.
3. *Se A' è una matrice ottenuta da A scambiando due sue righe (o colonne)* $\Longleftrightarrow |A'| = -|A|$.
4. *Se due righe (o colonne) di A sono uguali* $\Longrightarrow |A| = 0$.
5. *Se la riga R_i di A è del tipo $R_i = R_i' + R_i''$, allora:*

$$|A| = \begin{vmatrix} R_1 \\ \vdots \\ R_i' + R_i'' \\ \vdots \\ R_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} R_1 \\ \vdots \\ R_i' \\ \vdots \\ R_n \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} R_1 \\ \vdots \\ R_i'' \\ \vdots \\ R_n \end{vmatrix}.$$

6. Se la colonna C_i di A è del tipo $C_i = C_i' + C_i''$, allora:

$$
\begin{aligned}
|A| = \begin{vmatrix} C_1 & \dots & C_i' + C_i'' & \dots & C_n \end{vmatrix} = \\
= \begin{vmatrix} C_1 & \dots & C_i' & \dots & C_n \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} C_1 & \dots & C_i'' & \dots & C_n \end{vmatrix}.
\end{aligned}
$$

7. Sia $\lambda \in k$. Allora:

$$
\begin{vmatrix} R_1 \\ \vdots \\ \lambda R_i \\ \vdots \\ R_n \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} R_1 \\ \vdots \\ R_i \\ \vdots \\ R_n \end{vmatrix}
$$

e

$$
\begin{vmatrix} C_1 & \dots & \lambda C_i & \dots & C_n \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} C_1 & \dots & C_i & \dots & C_n \end{vmatrix}
$$

8. Se A ha due righe (o colonne) proporzionali $\Longrightarrow |A| = 0$.
9. Per ogni i:

$$\begin{vmatrix} R_1 \\ \vdots \\ R_i + \sum_{j \neq i} \lambda_j R_j \\ \vdots \\ R_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} R_1 \\ \vdots \\ R_i \\ \vdots \\ R_n \end{vmatrix}$$

   e

$$\begin{vmatrix} C_1 & \dots & C_i + \sum_{j \neq i} \lambda_j C_j & \dots & C_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} C_1 & \dots & C_i & \dots & C_n \end{vmatrix}$$

10. Se per qualche i si ha $R_i = \sum_{j \neq i} \lambda_j R_j$ (o $C_i = \sum_{j \neq i} \lambda_j C_j$), cioè se una riga (o colonna) è combinazione lineare delle altre righe (o colonne) di $A \Longrightarrow |A| = 0$.

Teorema (Teorema di Binet)

Siano $A, B \in k^{n,n}$. Allora il determinante della matrice $A \cdot B$ è il prodotto dei determinanti delle due matrici, cioè:

$$|A \cdot B| = |A| \cdot |B|.$$

Definizione

Sia $A = (a_{ij})$ una matrice $m \times n$. Chiamiamo minore di ordine k estratto da A il determinante di una matrice $k \times k$ ottenuta con gli elementi comuni a k righe e k colonne di A.

Definizione

Sia A una matrice $m \times n$. Chiamiamo rango di A, che indichiamo con $\rho(A)$, l'ordine massimo di un minore non nullo.

Osservazione

Dire che $\rho(A) = r$ significa dire che esiste un minore non nullo di ordine r e che tutti i minori di ordine $\geq r + 1$ sono nulli.

Riduzione per righe

Definizione

Una matrice $A = (a_{ij})$ si dice ridotta per righe (o colonne) se in ogni riga (o colonna) non nulla esiste un elemento $a_{hk} \neq 0$ tale che $a_{jk} = 0$ per ogni $j > h$, cioè al di sotto del quale vi sono solo zeri (o $a_{hj} = 0$ per ogni $j > k$, cioè alla destra del quale compaiono solo zeri). Gli elementi $a_{hk} \neq 0$ (uno per ogni riga non nulla) sono detti speciali.

Sia $A \in k^{m,n}$ una matrice e Siano $R_1, \ldots, R_m$ le sue righe. La riduzione per righe permette di passare da una matrice A ad una matrice A' ridotta per righe, in modo che $\rho(A) = \rho(A')$.

Le operazioni, dette elementari, sulla matrice A che consentono di non alterare il suo rango sono:

- scambio di due righe
- moltiplicazione di una riga per uno scalare non nullo, cioè $R_i \longmapsto \lambda R_i$
- sostituzione di una riga con la somma della riga stessa e di un multiplo di un'altra riga, cioè $R_i \longmapsto R_i + \lambda R_j$.

COME SI FA LA RIDUZIONE PER RIGHE. Si considera la prima riga non nulla. Supponiamo che sia la prima e sia $a_{1j_1} \neq 0$. Per fare in modo che sotto a_{1j_1} per ogni riga R_i ci siano zeri, cioè per ottenere 0 al posto di a_{ij_1}, bisogna fare questa sostituzione:

$$R_i \longmapsto R_i - \frac{a_{ij_1}}{a_{1j_1}} R_1.$$

Così facendo a_{1j_1} è diventato elemento speciale.

Si passa alla successiva riga non nulla della matrice ottenuta. Supponiamo che sia la seconda e che $a_{2j_2} \neq 0$. Vogliamo che gli elementi al di sotto di a_{2j_2}, cioè a_{ij_2} con $i > 2$, vengano sostituiti con degli zeri. Per farlo facciamo la sostituzione:

$$R_i \longmapsto R_i - \frac{a_{ij_2}}{a_{2j_2}} R_2.$$

Così facendo a_{2j_2} è diventato elemento speciale.

Procedendo in questo modo otteniamo, al più dopo m passi, in quanto m è il numero delle righe, una matrice ridotta, diversa da A, ma avente il suo stesso rango.

Osservazione

Il numero delle righe non nulle di una matrice ridotta è uguale al suo rango. Quindi, per calcolare il rango di una matrice A è sufficiente ridurla e calcolare il rango della matrice ridotta così ottenuta.

Fare esercizi da 1.7 a 1.12.

Definizione

La matrice quadrata

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \in k^{n,n}$$

è detta matrice identica di ordine n. Essa è tale che, se $A \in k^{n,n}$, allora:

$$A \cdot I = I \cdot A = A.$$

Definizione

Una matrice $A \in k^{n,n}$ è detta invertibile se esiste una matrice $B \in k^{n,n}$ tale che:

$$A \cdot B = B \cdot A = I.$$

B è detta matrice inversa di A e si indica anche con A^{-1}.

Definizione

Sia $A \in k^{n,n}$. Chiamiamo matrice aggiunta di A la matrice A_a avente in ogni posto (i,j) il complemento algebrico di posto (i,j):

$$A_\mathrm{a} = (A_{ij}).$$

Teorema

Una matrice $A \in k^{n,n}$ è invertibile $\Longleftrightarrow |A| \neq 0$. In tal caso, la matrice inversa di A è:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\,{}^tA_a.$$

DIMOSTRAZIONE.

Fare esercizi 1.13 e 1.14.

Definizione

Un sistema lineare è un insieme di m equazioni lineari in n incognite a coefficienti in un campo k. Si parlerà di sistema lineare $m \times n$:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases}$$

con $a_{ij}, b_h \in k$. Gli a_{ij} vengono detti coefficienti delle incognite e i b_h termini noti.

Si considerano le matrici:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \in k^{m,n}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} \in k^{n,1},$$

$$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix} \in k^{m,1}, \text{ e } A|B = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \ddots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right) \in k^{m,n+1}$$

La matrice A è detta matrice dei coefficienti o matrice incompleta, B matrice (o colonna) dei termini noti, X matrice o colonna delle incognite e $A|B$ matrice completa.
Osserviamo che il sistema lineare si può scrivere nella forma $AX = B$.

Definizione

Sia $AX = B$ un sistema lineare di tipo $m \times n$. Diremo soluzione del sistema lineare un elemento $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \in k^n$ tale che, posto:

$$\alpha = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \ldots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$$

si abbia $A \cdot \alpha = B$., cioè sostituendo α_i ad ogni i per $i = 1, \ldots, n$ vengono soddisfatte tutte le equazioni.

Definizione

Un sistema lineare si dice impossibile se non ammette alcuna soluzione, possibile se ammette almeno una soluzione. Quando il sistema ammette un'unica soluzione è detto determinato e, quando ne ammette più di una, è detto indeterminato.

Definizione

Due sistemi lineari $AX = B$ e $A'X = B'$ in n incognite si dicono equivalenti se hanno le stesse soluzioni.

Osservazione

Sia $AX = B$ un sistema lineare $m \times n$. Riducendo per righe la matrice completa $A|B$, in modo che gli elementi speciali compaiano in A, otteniamo un sistema lineare $A'X = B'$ equivalente a quello di partenza, ma con la matrice A' ridotta. A questo punto risolvere il sistema lineare $A'X = B'$ è semplice: si procede per sostituzione dal basso verso l'alto, ricavando di volta in volta l'incognita corrispondente all'elemento speciale.

Definizione

Sia $AX = B$ un sistema lineare nelle n incognite $x_1, \ldots, x_n$. r incognite $x_{i_1}, \ldots, x_{i_r}$ si dicono libere se $\forall \alpha_{i_1}, \ldots, \alpha_{i_r} \in k$ esiste una e una sola n-upla $(\alpha_1, \ldots \alpha_n)$ che è soluzione del sistema.

Teorema (Teorema di Rouché-Capelli I)

Un sistema lineare $AX = B$ di tipo $m \times n$ è possibile $\iff \rho(A) = \rho(A|B)$.

DIMOSTRAZIONE NELLE PROSSIME LEZIONI.

Teorema (Teorema di Rouché-Capelli II)

Sia $AX = B$ sistema lineare di tipo $m \times n$ e sia $\rho(A) = \rho(A|B) = r$. Allora il sistema ha $n - r$ incognite libere e diciamo che il sistema ammette ∞^{n-r} soluzioni.

Fare esercizi da 1.15 a 1.22.

Teorema (Teorema di Cramer)

Un sistema lineare $AX = B$ di tipo $n \times n$ è determinato $\iff |A| \neq 0$. In tal caso, considerate le matrici:

$$B_1 = \begin{pmatrix} b_1 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ b_n & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, B_2 = \begin{pmatrix} a_{11} & b_1 & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & b_2 & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ a_{n1} & b_n & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, \dots$$

$$B_n = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & b_2 \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & b_n \end{pmatrix},$$

la soluzione del sistema è:

$$\left(\frac{|B_1|}{|A|}, \frac{|B_2|}{|A|}, \dots, \frac{|B_n|}{|A|} \right).$$

DIMOSTRAZIONE.

Fare esercizi 1.28, 1.29 e 1.30.

Definizione

Se:

$$B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}$$

allora il sistema lineare è detto omogeneo.

Banalmente in questo caso si ha $\rho(A) = \rho(A|B)$ e il sistema ammette sempre una soluzione, che è $(0, 0, \dots, 0)$. Questa è detta soluzione banale.

Proposizione

Sia $AX = 0$ un sistema lineare omogeneo di tipo $m \times n$. L'insieme delle soluzioni è un sottospazio di k^n.

Corollario

Un sistema lineare omogeneo $AX = 0$ di tipo $m \times n$ ha soluzioni non banali $\Leftrightarrow \rho(A) < n$.

Fare esercizi da 1.23 a 1.27.

Sia $AX = 0$ un sistema lineare omogeneo di tipo $m \times n$ e sia $\rho(A) = n - 1$. Allora possiamo supporre che $m = n - 1$ e che:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n-1\,1} & a_{n-1\,2} & \dots & a_{n-1\,n} \end{pmatrix}.$$

Poniamo:

$$A_i = (-1)^{i+1} \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1\,i-1} & a_{1\,i+1} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2\,i-1} & a_{2\,i+1} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n-1\,1} & \dots & a_{n-1\,i-1} & a_{n-1\,i+1} & \dots & a_{n-1\,n} \end{vmatrix}.$$

Proposizione

Le soluzioni di un sistema lineare omogeneo $AX = 0$ di tipo $(n-1) \times n$, con $\rho(A) = n - 1$, sono ∞^1 e sono tutte del tipo:

$$(\lambda A_1, \lambda A_2, \dots, \lambda A_n),$$

con $\lambda \in k$. In particolare, sono tutte proporzionali tra loro.

Fare esercizi da 1.31 a 1.46.

Fare esercizi “Competenze minime UDE1”, “Tutte le competenze UDE1” e “Esercizi su matrici e sistemi lineari” reperibili su studium.