Corso di Laurea in Ingegneria Industriale (F-O)

Prova di **Algebra lineare e Geometria** - Appello 29 Gennaio 2024

Durata della prova: 3 ore.
È vietato uscire dall'aula prima di aver consegnato definitivamente il compito.
È vietato consultare libri o appunti. Compito B

I

Sono dati in $\mathbb{R}^3$ i vettori $v_1 = (1,1,0)$, $v_2 = (0,1,1)$ e $v_3 = (1,0,0)$. Sia $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'endomorfismo definito dalle assegnazioni:

$$\begin{aligned} f(v_1) &= (k+1, k+1, 0)\\ f(v_2) &= (1,0,-1)\\ f(v_3) &= (k, k+2, k+2)\end{aligned}$$

al variare di $k \in \mathbb{R}$.

1. **5 punti.** Studiare f, determinando in ciascun caso $\operatorname{Im} f$ e $\operatorname{Ker} f$ e le loro equazioni cartesiane.
2. **5 punti.** Studiare la semplicità di f nei casi $k = 0$ e $k = -1$, determinando, se possibile, una base di autovettori per f.
3. **5 punti.** È dato il vettore $u = v_1 + v_2 + kv_3 \in \mathbb{R}^3$. Calcolare $f^{-1}(u)$ al variare di $k \in \mathbb{R}$.
4. **ESERCIZIO BONUS: 5 PUNTI.** Determinare il valore di $k \in \mathbb{R}$ per il quale $v_1 + v_2$ è autovettore per f. Dato $W = \mathscr{L}(v_1 + v_2, v_2 + v_3)$, mostrare che per tale valore di k la restrizione $f|_W$ induce un endomorfismo semplice $g\colon V \to V$.

Soluzione

1. È immediato vedere che $\mathscr{A} = [v_1, v_2, v_3]$ è una base di $\mathbb{R}^3$ e che $[(x,y,z)]_{\mathscr{A}} = (y-z, z, x-y+z)$ per ogni $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. Di conseguenza, si vede che:

$$M^{\mathscr{A}}(f) = \begin{pmatrix} k+1 & 1 & 0\\ 0 & -1 & k+2\\ 0 & 0 & k\end{pmatrix}.$$

Quindi, $|M^{\mathscr{A}}(f)| = -k(k+1)$. Questo vuol dire che per $h \neq 0, -1$ f è un isomorfismo, cioè f è iniettiva e suriettiva, per cui si ha $\operatorname{Im} f = \mathbb{R}^3$ e $\operatorname{Ker} f = \{(0,0,0)\}$.

Sia $k = -1$. In tal caso:

$$M^{\mathscr{A}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0\\ 0 & -1 & 1\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}.$$

È evidente che $\dim \operatorname{Im} f = \rho(M^{\mathscr{A}}(f)) = 2$ e una base di $\operatorname{Im} f$ è data da $[f(v_2), f(v_3)] = [(1,0,-1), (-1,1,1)]$. Da:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1\\ -1 & 1 & 1\\ x & y & z\end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow x + z = 0$$

otteniamo che $\operatorname{Im} f = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + z = 0\}$. Inoltre, sappiamo che $\dim \operatorname{Ker} f = 1$ e, dal momento che $f(v_1) = (0,0,0)$, abbiamo $v_1 \in \operatorname{Ker} f$, per cui $\operatorname{Ker} f = \mathscr{L}(v_1) = \mathscr{L}((1,1,0))$. Da:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0\\ x & y & z\end{pmatrix} \xrightarrow{\text{riducendo}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0\\ x-y & 0 & z\end{pmatrix}$$

abbiamo che $\operatorname{Ker} f = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - y = 0,\ z = 0\}$.

Sia $k = 0$. In tal caso:

$$M^{\mathscr{A}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

È evidente che $\dim \operatorname{Im} f = \rho(M^{\mathscr{A}}(f)) = 2$ e una base di $\operatorname{Im} f$ è data da $[f(v_1), f(v_2)] = [(1,1,0),(1,0,-1)]$. Da:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ x & y & z \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow -x + y - z = 0$$

otteniamo che $\operatorname{Im} f = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - y + z = 0\}$. Inoltre, sappiamo che $\dim \operatorname{Ker} f = 1$ e abbiamo:

$$\operatorname{Ker} f = \{v \in \mathbb{R}^3 \mid [v]_{\mathscr{A}} = (a, b, c),\ a + b = 0,\ -b + 2c = 0\} = \mathscr{L}(-2v_1 + 2v_2 + v_3) = \mathscr{L}((-1,0,2)).$$

Da:

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ x & y & z \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{riducendo}} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & y & 2x + z \end{pmatrix}$$

abbiamo che $\operatorname{Ker} f = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x + z = 0,\ y = 0\}$.

2. Sia $k = -1$. In questo caso:

$$P(T) = \begin{vmatrix} -T & 1 & 0 \\ 0 & -1-T & 1 \\ 0 & 0 & -1-T \end{vmatrix} = -T(-1-T)^2,$$

per cui gli autovalori sono 0 e -1, con $m_0 = 1$ e $m_{-1} = 2$. Sappiamo che necessariamente $\dim V_0 = m_0 = 1$, mentre $1 \leq \dim V_{-1} \leq 2 = m_{-1}$. Questo vuol dire che f è semplice se e solo se $\dim V_{-1} = m_{-1} = 2$.

Sia $T = -1$. Sappiamo che $V_{-1} = \operatorname{Ker} f_{-1}$, dove $f_{-1} = f + i$ e:

$$M^{\mathscr{A}}(f_{-1}) = M^{\mathscr{A}}(f) + I = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Quindi, $\dim V_{-1} = 3 - 2 = 1 < 2 = m_{-1}$, per cui per $k = -1$ possiamo dire che f non è semplice.

Sia $k = 0$. In questo caso:

$$P(T) = \begin{vmatrix} 1-T & 1 & 0 \\ 0 & -1-T & 2 \\ 0 & 0 & -T \end{vmatrix} = -T(1-T)(-1-T).$$

Quindi, gli autovalori sono 0, 1 e -1, tutti distinti di molteplicità algebrica 1, per cui possiamo dire che certamente f è semplice. Sappiamo, poi, che $V_0 = \operatorname{Ker} f = \mathscr{L}((-1,0,2))$. Inoltre, dalle assegnazioni sappiamo che $f(v_1) = hv_1 = v_1$, per cui $v_1 \in V_1$ e, dovendo essere $\dim V_1 = 1$, sappiamo anche che $V_1 = \mathscr{L}(v_1) = \mathscr{L}((1,1,0))$.

Sia $T = -1$. Sappiamo che $V_{-1} = \operatorname{Ker} f_{-1}$, dove $f_{-1} = f + i$ e:

$$M^{\mathscr{A}}(f_{-1}) = M^{\mathscr{A}}(f) + I = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{riducendo}} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

per cui:

$$V_{-1} = \{v \in \mathbb{R}^3 \mid [v]_{\mathscr{A}} = (a, b, c),\ 2a + b = 0,\ 2c = 0\} = \mathscr{L}(v_1 - 2v_2) = \mathscr{L}((1,-1,-2)).$$

Quindi, per $k = 0$ una base di autovettori è $[(-1,0,2),(1,1,0),(1,-1,-2)]$.

3. Dal momento che $[u]_{\mathscr{A}} = (1,1,k)$, per calcolare $f^{-1}(u)$ occorre risolvere il sistema la cui matrice completa associata è:
$$\left(\begin{array}{ccc|c} k+1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & k+2 & 1 \\ 0 & 0 & k & k \end{array}\right).$$
Nel caso in cui $k \neq 0, -1$ abbiamo una sola soluzione:
$$\begin{cases} (k+1)a + b = 1 \\ -b + (k+2)c = 1 \\ kc = k \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -\frac{k}{k+1} \\ b = k+1 \\ c = 1. \end{cases}$$
Quindi, per $k \neq 0, -1$:
$$f^{-1}(u) = \left\{ -\frac{k}{k+1} v_1 + (k+1) v_2 + v_3 \right\} = \left\{ \left(\frac{1}{k+1}, \frac{k^2+k+1}{k+1}, k+1 \right) \right\}.$$
Se $k = 0$, la matrice associata è ridotta e si ha $\rho(A) = \rho(A|B) = 2$, per cui in questo caso abbiamo ∞^1 soluzioni:
$$\begin{cases} a + b = 1 \\ -b + 2c = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 - b \\ c = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2} b, \end{cases}$$
per cui:
$$f^{-1}(u) = \left\{ (1-b) v_1 + b v_2 + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} b \right) \in \mathbb{R}^3 \right\} = \left\{ \left(\frac{3}{2} - \frac{1}{2} b, 1, b \right) \right\}.$$
Se $k = -1$, la matrice associata è:
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{riducendo}} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right),$$
per cui il sistema è impossibile e si ha, perciò, $f^{-1}(u) = \emptyset$.

4. Osserviamo che $[v_1 + v_2]_{\mathscr{A}} = (1,1,0)$. Dunque, da:
$$\begin{pmatrix} k+1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & k+2 \\ 0 & 0 & k \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k+2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$
vediamo che $f(v_1 + v_2) = (h+1) v_1 - v_2$. Per essere $v_1 + v_2$ autovettore i vettori $v_1 + v_2$ e $(k+2) v_1 - v_2$ devono essere proporzionali tra loro, per cui è sufficiente che siano proporzionali le loro componenti rispetto alla base $\mathscr{A}$. Questo vuol dire che la matrice:
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ k+2 & -1 \end{pmatrix}$$
deve avere determinante nullo, cioè deve essere $-k-3 = 0$. Quindi, per $k = -3$ possiamo dire che $v_1 + v_2$ è autovettore per f e si ha $f(v_1 + v_2) = -v_1 - v_2$. È anche chiaro che per tale valore di k si ha $f(v_1 + v_2) \in W$. Dal momento che $f(W) = \mathscr{L}(f(v_1 + v_2), f(v_2 + v_3))$, affinché $f|_W$ induca un endomorfismo g di W si deve avere $f(v_2 + v_3) \in W$. Da:
$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}$$
vediamo che $f(v_2 + v_3) = v_1 - 2v_2 - 3v_3$, cioè $f(1,1,1) = (-2,-1,-2)$. Per sapere se $v_1 - 2v_2 - 3v_3 \in W = \mathscr{L}(v_1 + v_2, v_2 + v_3) = \mathscr{L}((1,2,1),(1,1,1))$, occorre vedere se il sistema avente la seguente matrice associata ammette soluzioni:
$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{riducendo}} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{cases} a + b = -2 \\ a = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -3. \end{cases}$$

Quindi, effettivamente $v_1 - 2v_2 - 3v_3 \in W$ e $f|_W$ induce un endomorfismo $g\colon W \to W$. Sia $\mathscr{B} = [v_1 + v_2, v_2 + v_3]$ la base di W data dal testo (si verifica che i due vettori sono linearmente indipendenti). Dato che:

$$\begin{aligned} g(v_1 + v_2) &= f(v_1 + v_2) = -(v_1 + v_2) \\ g(v_2 + v_3) &= f(v_2 + v_3) = (v_1 + v_2) - 3(v_2 + v_3), \end{aligned}$$

abbiamo:

$$M^{\mathscr{B}}(g) = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}.$$

Chiaramente si ha:

$$P(T) = \begin{vmatrix} -1-T & 1 \\ 0 & -3-T \end{vmatrix} = (-1-T)(-3-T),$$

per cui gli autovalori sono -1 e -3, entrambi di molteplicità algebrica 1 e, dunque, g è semplice.

II

1. **5 punti.** È assegnato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}, u$. Sono date le rette:

$$r\colon \begin{cases} x - 2y + z - 2 = 0 \\ 2x + y + z = 0 \end{cases} \quad \text{e} \quad s\colon \begin{cases} y + z = 1 \\ x - z = -1. \end{cases}$$

Determinare il piano π parallelo a r e s e passante per $P = (1,1,0)$. Mostrare che la retta s e l'asse $\vec{z}$ sono complanari e determinare il piano che le contiene.

2. **5 punti.** È assegnato nel piano un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $O, \vec{x}, \vec{y}, u$. Sono date le rette $r\colon x + 2y + 1 = 0$ e $s\colon x + y = 0$. Determinare e studiare il fascio di coniche tangenti alle rette r e s nei punti in cui esse incontrano l'asse $\vec{x}$. Determinare una forma canonica della conica del fascio passante per il punto $P = (0, -1)$.

3. **5 punti.** È assegnato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}, u$. Studiare le quadriche di equazione:

$$kx^2 + 2xy + y^2 + kz^2 + 2kz + 1 = 0,$$

al variare di $k \in \mathbb{R}$.

Soluzione

1. Le rette r e s hanno parametri direttori, rispettivamente, $(3, -1, -5)$ e $(1, -1, 1)$. Quindi, se (a, b, c) sono le componenti di un vettore ortogonale al piano π, si ha:

$$\begin{cases} 3a - b - 5c = 0 \\ a - b + c = 0 \end{cases}$$

per cui possiamo prendere $(3, 4, 1)$ come componenti di un vettore ortogonale al piano π e, dunque:

$$\pi\colon 3(x-1) + 4(y-1) + z = 0 \Rightarrow \pi\colon 3x + 4y + z - 7 = 0.$$

È facile verificare che le rette r e $\vec{z}\colon x = y = 0$ sono incidenti e, perciò, complanari. Per determinare il piano che contiene le due rette, consideriamo il fascio di piani contenenti la retta s:

$$\lambda(y + z - 1) + \mu(x - z + 1) = 0$$

e imponiamo il passaggio per un punto qualsiasi dell'asse $\vec{y}$, per esempio l'origine:

$$-\lambda + \mu = 0.$$

Prendendo $\lambda = 1$ e $\mu = 1$ vediamo che il piano che contiene le due rette ha equazione $x + y = 0$.

2. Le coniche spezzate del fascio sono le due di equazioni $(x+2y-1)(x+y)=0$ e $y^2=0$. Quindi, il fascio di coniche ha equazione:

$$(x+2y+1)(x+y)+hy^2=0 \Rightarrow x^2+3xy+(h+2)y^2+x+y=0.$$

Dal momento che le coniche spezzate del fascio sono solo le due usate per scriverne l'equazione, possiamo dire che per $h \neq 0$ le coniche sono irriducibili, mentre per $h=0$ abbiamo ovviamente una conica spezzata.

Dato che:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & \frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} & h+2 \end{vmatrix} = h - \frac{1}{4},$$

possiamo concludere che per $h > \frac{1}{4}$ abbiamo delle ellissi, tra le quali non figurano circonferenze; per $h = \frac{1}{4}$ abbiamo una parabola; per $h < \frac{1}{4}$, $h \neq 0$, abbiamo delle iperboli, tra le quali figura una equilatera per $h=-3$, essendo $\mathrm{Tr}(A) = h+3$.

Imponendo il passaggio per il punto $P=(0,-1)$, troviamo $h=-1$, per cui abbiamo la conica di equazione:

$$x^2+3xy+y^2+x+y=0,$$

che è un'iperbole, in base allo studio appena fatto. Una sua equazione ridotta è del tipo $\alpha X^2+\beta Y^2=\gamma$. Le matrici associate alla conica nei due sistemi di riferimento sono:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}, \quad B' = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & -\gamma \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} & 1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad A' = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}.$$

Dato che $|B'|=|B|=\frac{1}{4}$ e $|A'|=|A|=-\frac{5}{4}$, vediamo che $\gamma=\frac{1}{5}$. α e β sono gli autovalori di A:

$$P_A(T) = \begin{vmatrix} 1-T & \frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} & 1-T \end{vmatrix} = T^2-2T-\frac{5}{4}.$$

Quindi, gli autovalori sono $\frac{5}{2}$ e $-\frac{1}{2}$. Prendendo $\alpha=\frac{5}{2}$ e $\beta=-\frac{1}{2}$ otteniamo una forma canonica della conica:

$$\frac{5}{2}X^2-\frac{1}{2}Y^2=\frac{1}{5} \Rightarrow \frac{25}{2}X^2-\frac{5}{2}Y^2=1.$$

3. Le matrici associate sono:

$$B = \begin{pmatrix} k & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k & k \\ 0 & 0 & k & 1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad A = \begin{pmatrix} k & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & k \end{pmatrix}.$$

Abbiamo $|B|=-k(k-1)^2$ e $|A|=k^2-k$. Per $k=0$ abbiamo $|B|=|A|=0$ e $\rho(B)=3$, per cui abbiamo un cilindro. Per $k=1$ abbiamo $|B|=|A|=0$ e $\rho(B)=2$, per cui la quadrica è spezzata. Per $k \neq 0,1$ abbiamo ellissoidi o iperboloidi. Cerchiamo il segno degli autovalori di A:

$$P_A(T) = \begin{vmatrix} k-T & 1 & 0 \\ 1 & 1-T & 0 \\ 0 & 0 & k-T \end{vmatrix} = (k-T)[T^2-(k+1)T+k-1].$$

Affinché gli autovalori siano concordi uno dei seguenti sistemi deve avere soluzioni:

$$\begin{cases} k>0 \\ k+1>0 \\ k-1>0 \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} k<0 \\ k+1<0 \\ k-1>0. \end{cases}$$

Il primo ammette $k>1$ come soluzione, mentre il secondo è impossibile. Quindi, per $k>1$ abbiamo ellissoidi, mentre per $k<1$, $k \neq 0$, abbiamo iperboloidi. Dal segno di $|B|$, in particolare, segue che per $k<0$ abbiamo degli iperboloidi iperbolici, per $0<k<1$ degli iperboloidi ellittici e per $k>1$ degli ellissoidi reali.