

Corso di Laurea in Ingegneria Industriale (F-O)

Prova di Algebra lineare e Geometria - Appello 29 Gennaio 2024

Durata della prova: 3 ore.

È vietato uscire dall'aula prima di aver consegnato definitivamente il compito.

È vietato consultare libri o appunti.

Compito A

I

Sono dati in \mathbb{R}^3 i vettori $v_1 = (1, 1, 0)$, $v_2 = (0, 1, 1)$ e $v_3 = (1, 0, 0)$. Sia $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ l'endomorfismo definito dalle assegnazioni:

$$f(v_1) = (h, h, 0)$$

$$f(v_2) = (1, 0, -1)$$

$$f(v_3) = (h-1, h+1, h+1)$$

al variare di $h \in \mathbb{R}$.

- 5 punti.** Studiare f , determinando in ciascun caso $\text{Im } f$ e $\text{Ker } f$ e le loro equazioni cartesiane.
- 5 punti.** Studiare la semplicità di f nei casi $h = 0$ e $h = 1$, determinando, se possibile, una base di autovettori per f .
- 5 punti.** È dato il vettore $u = v_1 + v_2 + (h-1)v_3 \in \mathbb{R}^3$. Calcolare $f^{-1}(u)$ al variare di $h \in \mathbb{R}$.
- ESERCIZIO BONUS: 5 PUNTI.** Determinare il valore di $h \in \mathbb{R}$ per il quale $v_1 + v_2$ è autovettore per f . Dato $W = \mathcal{L}(v_1 + v_2, v_2 + v_3)$, mostrare che per tale valore di h la restrizione $f|_W$ induce un endomorfismo semplice $g: V \rightarrow V$.

Soluzione

- È immediato vedere che $\mathcal{A} = [v_1, v_2, v_3]$ è una base di \mathbb{R}^3 e che $[(x, y, z)]_{\mathcal{A}} = (y-z, z, x-y+z)$ per ogni $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Di conseguenza, si vede che:

$$M^{\mathcal{A}}(f) = \begin{pmatrix} h & 1 & 0 \\ 0 & -1 & h+1 \\ 0 & 0 & h-1 \end{pmatrix}.$$

Quindi, $|M^{\mathcal{A}}(f)| = -h(h-1)$. Questo vuol dire che per $h \neq 0, 1$ f è un isomorfismo, cioè f è iniettiva e suriettiva, per cui si ha $\text{Im } f = \mathbb{R}^3$ e $\text{Ker } f = \{(0, 0, 0)\}$.

Sia $h = 0$. In tal caso:

$$M^{\mathcal{A}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

È evidente che $\dim \text{Im } f = \rho(M^{\mathcal{A}}(f)) = 2$ e una base di $\text{Im } f$ è data da $[f(v_2), f(v_3)] = [(1, 0, -1), (-1, 1, 1)]$. Da:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ x & y & z \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow x + z = 0$$

otteniamo che $\text{Im } f = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + z = 0\}$. Inoltre, sappiamo che $\dim \text{Ker } f = 1$ e, dal momento che $f(v_1) = (0, 0, 0)$, abbiamo $v_1 \in \text{Ker } f$, per cui $\text{Ker } f = \mathcal{L}(v_1) = \mathcal{L}((1, 1, 0))$. Da:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ x & y & z \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{riducendo}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ x-y & 0 & z \end{pmatrix}$$

abbiamo che $\text{Ker } f = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - y = 0, z = 0\}$.

Sia $h = 1$. In tal caso:

$$M^{\mathcal{A}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

È evidente che $\dim \text{Im } f = \rho(M^{\mathcal{A}}(f)) = 2$ e una base di $\text{Im } f$ è data da $[f(v_1), f(v_2)] = [(1, 1, 0), (1, 0, -1)]$. Da:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ x & y & z \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow -x + y - z = 0$$

otteniamo che $\text{Im } f = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - y + z = 0\}$. Inoltre, sappiamo che $\dim \text{Ker } f = 1$ e abbiamo:

$$\text{Ker } f = \{v \in \mathbb{R}^3 \mid [v]_{\mathcal{A}} = (a, b, c), a + b = 0, -b + 2c = 0\} = \mathcal{L}(-2v_1 + 2v_2 + v_3) = \mathcal{L}((-1, 0, 2)).$$

Da:

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ x & y & z \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{riducendo}} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & y & 2x + z \end{pmatrix}$$

abbiamo che $\text{Ker } f = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x + z = 0, y = 0\}$.

2. Sia $h = 0$. In questo caso:

$$P(T) = \begin{vmatrix} -T & 1 & 0 \\ 0 & -1 - T & 1 \\ 0 & 0 & -1 - T \end{vmatrix} = -T(-1 - T)^2,$$

per cui gli autovalori sono 0 e -1 , con $m_0 = 1$ e $m_{-1} = 2$. Sappiamo che necessariamente $\dim V_0 = m_0 = 1$, mentre $1 \leq \dim V_{-1} \leq 2 = m_{-1}$. Questo vuol dire che f è semplice se e solo se $\dim V_{-1} = m_{-1} = 2$.

Sia $T = -1$. Sappiamo che $V_{-1} = \text{Ker } f_{-1}$, dove $f_{-1} = f + i$ e:

$$M^{\mathcal{A}}(f_{-1}) = M^{\mathcal{A}}(f) + I = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Quindi, $\dim V_{-1} = 3 - 2 = 1 < 2 = m_{-1}$, per cui per $h = 0$ possiamo dire che f non è semplice.

Sia $h = 1$. In questo caso:

$$P(T) = \begin{vmatrix} 1 - T & 1 & 0 \\ 0 & -1 - T & 2 \\ 0 & 0 & -T \end{vmatrix} = -T(1 - T)(-1 - T).$$

Quindi, gli autovalori sono 0, 1 e -1 , tutti distinti di molteplicità algebrica 1, per cui possiamo dire che certamente f è semplice. Sappiamo, poi, che $V_0 = \text{Ker } f = \mathcal{L}((-1, 0, 2))$. Inoltre, dalle assegnazioni sappiamo che $f(v_1) = hv_1 = v_1$, per cui $v_1 \in V_1$ e, dovendo essere $\dim V_1 = 1$, sappiamo anche che $V_1 = \mathcal{L}(v_1) = \mathcal{L}((1, 1, 0))$.

Sia $T = -1$. Sappiamo che $V_{-1} = \text{Ker } f_{-1}$, dove $f_{-1} = f + i$ e:

$$M^{\mathcal{A}}(f_{-1}) = M^{\mathcal{A}}(f) + I = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{riducendo}} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

per cui:

$$V_{-1} = \{v \in \mathbb{R}^3 \mid [v]_{\mathcal{A}} = (a, b, c), 2a + b = 0, 2c = 0\} = \mathcal{L}(v_1 - 2v_2) = \mathcal{L}((1, -1, -2)).$$

Quindi, per $h = 1$ una base di autovettori è $[(-1, 0, 2), (1, 1, 0), (1, -1, -2)]$.

3. Dal momento che $[u]_{\mathcal{A}} = (1, 1, h-1)$, per calcolare $f^{-1}(u)$ occorre risolvere il sistema la cui matrice completa associata è:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} h & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & h+1 & 1 \\ 0 & 0 & h-1 & h-1 \end{array} \right).$$

Nel caso in cui $h \neq 0, 1$ abbiamo una sola soluzione:

$$\begin{cases} ha + b = 1 \\ -b + (h+1)c = 1 \\ (h-1)c = h-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{1-h}{h} \\ b = h \\ c = 1. \end{cases}$$

Quindi, per $h \neq 0, 1$:

$$f^{-1}(u) = \left\{ \frac{1-h}{h}v_1 + hv_2 + v_3 \right\} = \left\{ \left(\frac{1}{h}, \frac{h^2-h+1}{h}, h \right) \right\}.$$

Se $h = 1$, la matrice associata è ridotta e si ha $\rho(A) = \rho(A|B) = 2$, per cui in questo caso abbiamo ∞^1 soluzioni:

$$\begin{cases} a + b = 1 \\ -b + 2c = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 - b \\ c = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}b, \end{cases}$$

per cui:

$$f^{-1}(u) = \left\{ (1-b)v_1 + bv_2 + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}b \right) v_3 \in \mathbb{R}^3 \right\} = \left\{ \left(\frac{3}{2} - \frac{1}{2}b, 1, b \right) \right\}.$$

Se $h = 0$, la matrice associata è:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{array} \right) \xrightarrow{\text{riducendo}} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right),$$

per cui il sistema è impossibile e si ha, perciò, $f^{-1}(u) = \emptyset$.

4. Osserviamo che $[v_1 + v_2]_{\mathcal{A}} = (1, 1, 0)$. Dunque, da:

$$\begin{pmatrix} h & 1 & 0 \\ 0 & -1 & h+1 \\ 0 & 0 & h-1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h+1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

vediamo che $f(v_1 + v_2) = (h+1)v_1 - v_2$. Per essere $v_1 + v_2$ autovettore i vettori $v_1 + v_2$ e $(h+1)v_1 - v_2$ devono essere proporzionali tra loro, per cui è sufficiente che siano proporzionali le loro componenti rispetto alla base \mathcal{A} . Questo vuol dire che la matrice:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ h+1 & -1 \end{pmatrix}$$

deve avere determinante nullo, cioè deve essere $-h-2=0$. Quindi, per $h = -2$ possiamo dire che $v_1 + v_2$ è autovettore per f e si ha $f(v_1 + v_2) = -v_1 - v_2$. È anche chiaro che per tale valore di h si ha $f(v_1 + v_2) \in W$. Dal momento che $f(W) = \mathcal{L}(f(v_1 + v_2), f(v_2 + v_3))$, affinché $f|_W$ induca un endomorfismo g di W si deve avere $f(v_2 + v_3) \in W$. Da:

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

vediamo che $f(v_2 + v_3) = v_1 - 2v_2 - 3v_3$, cioè $f(1, 1, 1) = (-2, -1, -2)$. Per sapere se $v_1 - 2v_2 - 3v_3 \in W = \mathcal{L}(v_1 + v_2, v_2 + v_3) = \mathcal{L}((1, 2, 1), (1, 1, 1))$, occorre vedere se il sistema avente la seguente matrice associata ammette soluzioni:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \end{array} \right) \xrightarrow{\text{riducendo}} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \Rightarrow \begin{cases} a + b = -2 \\ a = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -3. \end{cases}$$

Quindi, effettivamente $v_1 - 2v_2 - 3v_3 \in W$ e $f|_W$ induce un endomorfismo $g: W \rightarrow W$. Sia $\mathcal{B} = [v_1 + v_2, v_2 + v_3]$ la base di W data dal testo (si verifica che i due vettori sono linearmente indipendenti). Dato che:

$$\begin{aligned} g(v_1 + v_2) &= f(v_1 + v_2) = -(v_1 + v_2) \\ g(v_2 + v_3) &= f(v_2 + v_3) = (v_1 + v_2) - 3(v_2 + v_3), \end{aligned}$$

abbiamo:

$$M^{\mathcal{B}}(g) = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}.$$

Chiaramente si ha:

$$P(T) = \begin{vmatrix} -1-T & 1 \\ 0 & -3-T \end{vmatrix} = (-1-T)(-3-T),$$

per cui gli autovalori sono -1 e -3 , entrambi di molteplicità algebrica 1 e, dunque, g è semplice.

II

1. **5 punti.** È assegnato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}, u$. Sono date le rette:

$$r: \begin{cases} 2x - y - z + 2 = 0 \\ x + y + 2z = 0 \end{cases} \quad \text{e} \quad s: \begin{cases} x + y = 1 \\ y - z = 1. \end{cases}$$

Determinare il piano π parallelo a r e s e passante per $P = (1, 0, 1)$. Mostrare che la retta s e l'asse \vec{y} sono complanari e determinare il piano che le contiene.

2. **5 punti.** È assegnato nel piano un sistema di riferimento cartesiano ortogonale O, \vec{x}, \vec{y}, u . Sono date le rette $r: x + 2y - 1 = 0$ e $s: x + y = 0$. Determinare e studiare il fascio di coniche tangenti alle rette r e s nei punti in cui esse incontrano l'asse \vec{x} . Determinare una forma canonica della conica del fascio passante per il punto $P = (0, 1)$.

3. **5 punti.** È assegnato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}, u$. Studiare le quadriche di equazione:

$$x^2 + 2xz + hy^2 + hz^2 + 2hy + 1 = 0,$$

al variare di $h \in \mathbb{R}$.

Soluzione

1. Le rette r e s hanno parametri direttori, rispettivamente, $(-1, -5, 3)$ e $(-1, 1, 1)$. Quindi, se (a, b, c) sono le componenti di un vettore ortogonale al piano π , si ha:

$$\begin{cases} -a - 5b + 3c = 0 \\ -a + b + c = 0, \end{cases}$$

per cui possiamo prendere $(4, 1, 3)$ come componenti di un vettore ortogonale al piano π e, dunque:

$$\pi: 4(x-1) + y + 3(z-1) = 0 \Rightarrow \pi: 4x + y + 3z - 7 = 0.$$

È facile verificare che le rette r e $\vec{y}: x = z = 0$ sono incidenti e, perciò, complanari. Per determinare il piano che contiene le due rette, consideriamo il fascio di piani contenenti la retta s :

$$\lambda(x + y - 1) + \mu(y - z - 1) = 0$$

e imponiamo il passaggio per un punto qualsiasi dell'asse \vec{y} , per esempio l'origine:

$$-\lambda - \mu = 0.$$

Prendendo $\lambda = 1$ e $\mu = -1$ vediamo che il piano che contiene le due rette ha equazione $x + z = 0$.

2. Le coniche spezzate del fascio sono le due di equazioni $(x + 2y - 1)(x + y) = 0$ e $y^2 = 0$. Quindi, il fascio di coniche ha equazione:

$$(x + 2y - 1)(x + y) + hy^2 = 0 \Rightarrow x^2 + 3xy + (h + 2)y^2 - x - y = 0.$$

Dal momento che le coniche spezzate del fascio sono solo le due usate per scriverne l'equazione, possiamo dire che per $h \neq 0$ le coniche sono irriducibili, mentre per $h = 0$ abbiamo ovviamente una conica spezzata.

Dato che:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & \frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} & h+2 \end{vmatrix} = h - \frac{1}{4},$$

possiamo concludere che per $h > \frac{1}{4}$ abbiamo delle ellissi, tra le quali non figurano circonferenze; per $h = \frac{1}{4}$ abbiamo una parabola; per $h < \frac{1}{4}$, $h \neq 0$, abbiamo delle iperboli, tra le quali figura una equilatera per $h = -3$, essendo $\text{Tr}(A) = h + 3$.

Imponendo il passaggio per il punto $P = (0, 1)$, troviamo $h = -1$, per cui abbiamo la conica di equazione:

$$x^2 + 3xy + y^2 - x - y = 0,$$

che è un'iperbole, in base allo studio appena fatto. Una sua equazione ridotta è del tipo $\alpha X^2 + \beta Y^2 = \gamma$. Le matrici associate alla conica nei due sistemi di riferimento sono:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}, \quad B' = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & -\gamma \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} & 1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad A' = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}.$$

Dato che $|B'| = |B| = \frac{1}{4}$ e $|A'| = |A| = -\frac{5}{4}$, vediamo che $\gamma = \frac{1}{5}$. α e β sono gli autovalori di A :

$$P_A(T) = \begin{vmatrix} 1-T & \frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} & 1-T \end{vmatrix} = T^2 - 2T - \frac{5}{4}.$$

Quindi, gli autovalori sono $\frac{5}{2}$ e $-\frac{1}{2}$. Prendendo $\alpha = \frac{5}{2}$ e $\beta = -\frac{1}{2}$ otteniamo una forma canonica della conica:

$$\frac{5}{2}X^2 - \frac{1}{2}Y^2 = \frac{1}{5} \Rightarrow \frac{25}{2}X^2 - \frac{5}{2}Y^2 = 1.$$

3. Le matrici associate sono:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & h & 0 & h \\ 1 & 0 & h & 0 \\ 0 & h & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & h & 0 \\ 1 & 0 & h \end{pmatrix}.$$

Abbiamo $|B| = -h(h-1)^2$ e $|A| = h^2 - h$. Per $h = 0$ abbiamo $|B| = |A| = 0$ e $\rho(B) = 3$, per cui abbiamo un cilindro. Per $h = 1$ abbiamo $|B| = |A| = 0$ e $\rho(B) = 2$, per cui la quadrica è spezzata. Per $h \neq 0, 1$ abbiamo ellissoidi o iperboloidi. Cerchiamo il segno degli autovalori di A :

$$P_A(T) = \begin{vmatrix} 1-T & 0 & 1 \\ 0 & h-T & 0 \\ 1 & 0 & h-T \end{vmatrix} = (h-T)[T^2 - (h+1)T + h-1].$$

Affinché gli autovalori siano concordi uno dei seguenti sistemi deve avere soluzioni:

$$\begin{cases} h > 0 \\ h+1 > 0 \\ h-1 > 0 \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} h < 0 \\ h+1 < 0 \\ h-1 > 0. \end{cases}$$

Il primo ammette $h > 1$ come soluzione, mentre il secondo è impossibile. Quindi, per $h > 1$ abbiamo ellissoidi, mentre per $h < 1$, $h \neq 0$, abbiamo iperboloidi. Dal segno di $|B|$, in particolare, segue che per $h < 0$ abbiamo degli iperboloidi iperbolici, per $0 < h < 1$ degli iperboloidi ellittici e per $h > 1$ degli ellissoidi reali.