Corso di Laurea in Ingegneria Elettronica

Prova di **Algebra lineare e Geometria** - Appello 25 Marzo 2024

Durata della prova: 3 ore.
È vietato uscire dall'aula prima di aver consegnato definitivamente il compito.
È vietato consultare libri o appunti.

I

Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'endomorfismo definito, al variare di $h \in \mathbb{R}$, dall'assegnazione:

$$f(x, y, z) = (x-(h+2)z, 2x-y-z, hx-hy-(2h+2)z) \quad \forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3.$$

1. **5 punti.** Studiare f al variare di $h \in \mathbb{R}$, determinando in ciascun caso $\operatorname{Im} f$ e $\operatorname{Ker} f$ e le loro equazioni cartesiane.
2. **5 punti.** Stabilire per quali valori di $h \in \mathbb{R}$ la somma $\operatorname{Ker} + \operatorname{Im} f$ è diretta e, in tali casi, determinarla.
3. **5 punti.** Diagonalizzare, se possibile, la matrice $M(f)$ nei casi $h = -1$ e $h = -3$.

Soluzione

1. Sappiamo che:

$$M(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -h-2 \\ 2 & -1 & -1 \\ h & -h & -2h-2 \end{pmatrix},$$

per cui $|M(f)| = h^2 + 3h + 2$. Questo significa che per $h \neq -2, -1$ f è un isomorfismo, cioè f è iniettiva e suriettiva, per cui $\operatorname{Ker} f = \{(0,0,0)\}$ e $\operatorname{Im} f = \mathbb{R}^3$.

Sia $h = -2$. Dunque:

$$M(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & -1 \\ -2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{riducendo}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Questo vuol dire che $\dim \operatorname{Im} f = \rho(M(f)) = 2$ e una sua base è data da $[(1,2,-2), (0,-1,2)]$. Inoltre, da:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & 2 \\ x & y & z \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow 2x - 2y - z = 0$$

vediamo che $\operatorname{Im} f = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x - 2y - z = 0\}$. Inoltre, sappiamo che $\dim \operatorname{Ker} f = 3 - 2 = 1$ e:

$$\operatorname{Ker} f = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = 0, -y - z = 0\} = \mathscr{L}((0,1,-1)).$$

Sia $h = -1$. Dunque:

$$M(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{riducendo}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Questo vuol dire che $\dim \operatorname{Im} f = \rho(M(f)) = 2$ e una sua base è data da $[(1,2,-1), (0,-1,1)]$. Inoltre, da:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ x & y & z \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow x - y - z = 0$$

vediamo che $\operatorname{Im} f = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - y - z = 0\}$. Inoltre, sappiamo che $\dim \operatorname{Ker} f = 3 - 2 = 1$ e:

$$\operatorname{Ker} f = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - z = 0,\ x - y = 0\} = \mathscr{L}((1,1,1)).$$

2. Sappiamo che per $h \neq -2, -1$ abbiamo $\operatorname{Ker} f = \{(0,0,0)\}$ e $\operatorname{Im} f = \mathbb{R}^3$. In questo caso, è scontato che la loro somma è diretta e che $\operatorname{Ker} f \oplus \operatorname{Im} f = \mathbb{R}^3$.

   Sia $h = -2$. Sappiamo che $\operatorname{Ker} f = \mathscr{L}((0,1,-1),(1,2,-2),(0,-1,2))$. È immediato vedere che i tre vettori sono linearmente indipendenti, per cui $\dim(\operatorname{Ker} f + \operatorname{Im} f) = 3$ e, essendo $\operatorname{Ker} f + \operatorname{Im} f$ un sottospazio di $\mathbb{R}^3$, deve essere $\operatorname{Ker} f + \operatorname{Im} f = \mathbb{R}^3$. Inoltre, dalla formula di Grassmann, otteniamo subito che $\operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Im} f$ ha dimensione 0, cioè che $\operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Im} f = \{(0,0,0)\}$. Questo vuol dire che in tal caso la somma è diretta e si ha $\operatorname{Ker} f \oplus \operatorname{Im} f = \mathbb{R}^3$.

   Sia $h = -1$. Sappiamo che $\operatorname{Ker} f = \mathscr{L}((1,1,1),(1,2,-1),(0,-1,1))$. È immediato vedere che i tre vettori sono linearmente indipendenti, per cui $\dim(\operatorname{Ker} f + \operatorname{Im} f) = 3$ e, essendo $\operatorname{Ker} f + \operatorname{Im} f$ un sottospazio di $\mathbb{R}^3$, deve essere $\operatorname{Ker} f + \operatorname{Im} f = \mathbb{R}^3$. Inoltre, dalla formula di Grassmann, otteniamo subito che $\operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Im} f$ ha dimensione 0, cioè che $\operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Im} f = \{(0,0,0)\}$. Questo vuol dire che in tal caso la somma è diretta e si ha $\operatorname{Ker} f \oplus \operatorname{Im} f = \mathbb{R}^3$.

3. Sia $h = -1$. In tal caso:
$$P(T) = \begin{vmatrix} 1-T & 0 & -1 \\ 2 & -1-T & -1 \\ -1 & 1 & -T \end{vmatrix} = -T(1-T)(-1-T).$$

   Quindi, gli autovalori sono tutti distinti di molteplicità algebrica 1, per cui f è certamenet semplice e $M(f)$ è diagonalizzabile. Sappiamo che $V_0 = \operatorname{Ker} f = \mathscr{L}((1,1,1))$.

   Sia $T = 1$. Sappiamo che $V_1 = \operatorname{Ker} f_1$, dove $f_1 = f - i$:
$$M(f_1) = M(f) - I = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 2 & -2 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{riducendo}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

   per cui $V_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid -z = 0, 2x - 2y = 0\} = \mathscr{L}((1,1,0))$.

   Sia $T = -1$. Sappiamo che $V_{-1} = \operatorname{Ker} f_{-1}$, dove $f_{-1} = f + i$ e:
$$M(f_{-1}) = M(f) + I = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{riducendo}} \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

   Dunque, $V_{-1} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x - z = 0, x + y = 0\} = \mathscr{L}((1,-1,2))$. Quindi, per $h = -1$ una base di autovettori è $[(1,1,1),(1,1,0),(1,-1,2)]$ e possiamo dire che $P^{-1}M(f)P = D$, dove:
$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

   Sia $h = -3$. In questo caso:
$$P(T) = \begin{vmatrix} 1-T & 0 & 1 \\ 2 & -1-T & -1 \\ -3 & 3 & 4-T \end{vmatrix} = (1-T)^2(T-2).$$

   In questo caso, gli autovalori sono 1 e 2, con $m_1 = 2$ e $m_2 = 1$. Sappiamo che necessariamente deve essere $\dim V_2 = m_2 = 1$, mentre $1 \leq \dim V_1 \leq 2 = m_2$ e sappiamo anche che f è semplice solo se $\dim V_1 = m_1 = 2$.

   Sia $T = 1$. Sappiamo che $V_1 = \operatorname{Ker} f_1$, dove $f_1 = f - i$ e:
$$M(f_1) = M(f) - I = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & -2 & -1 \\ -3 & 3 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{riducendo}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

   Dunque, $\rho(M(f_1)) = 2$ e $\dim V_1 = 3 - 2 = 1 < 2 = m_1$. Questo significa che per $h = -3$ f non è semplice e $M(f)$ non è, perciò, diagonalizzabile.

1. **5 punti.** È assegnato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}, u$. Sono dati:

$$r: \begin{cases} x - y + z + 2 = 0 \\ x + y + 2z - 1 = 0 \end{cases} \quad \text{e} \quad \pi: y + z = 0.$$

   Determinare la retta s proiezione ortogonale di r su π e la retta t ortogonale a r, parallela a π e passante per l'origine O.

2. **5 punti.** È assegnato nel piano un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $O, \vec{x}, \vec{y}, u$. Studiare il fascio di coniche di equazione:

$$hx^2 + 2hxy + y^2 + 2hx + 2y + h = 0,$$

   determinandone, in particolare, punti base e coniche spezzate. Determinare gli assi di simmetria della conica del fascio passante per il punto $A = (0, 1)$.

3. **5 punti.** È assegnato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}, u$. Studiare le quadriche di equazione:

$$hx^2 + hy^2 + 2xy + 2xz + 2yz + z^2 + 2z - 1 = 0,$$

   al variare di $h \in \mathbb{R}$.

4. **ESERCIZIO BONUS: 5 PUNTI.** È assegnato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}, u$. Sono date le rette:

$$r: \begin{cases} x - y + 2z + 1 = 0 \\ x + z - 1 = 0 \end{cases} \quad \text{e} \quad s: \begin{cases} x - y + 2 = 0 \\ y - z + 1 = 0. \end{cases}$$

   Mostrare che sono sghembe e determinare la retta t ortogonale e incidente entrambe le rette.

Soluzione

1. La retta s è intersezione del piano π con il piano α contenente r e ortogonale a π. I piani contenenti r hanno equazione:

$$\lambda(x - y + z + 2) + \mu(x + y + 2z - 1) = 0 \Rightarrow (\lambda + \mu)x + (-\lambda + \mu)y + (\lambda + 2\mu)z + 2\lambda - \mu = 0.$$

   Questo piano è ortogonale a π se i vettori di componenti $(\lambda + \mu, -\lambda + \mu, \lambda + 2\mu)$ e $(0, 1, 1)$ sono ortogonali fra loro, cioè se il loro prodotto scalare è nullo:

$$-\lambda + \mu + \lambda + 2\mu = 0 \Rightarrow \mu = 0 \Rightarrow \alpha: x - y + z + 2 = 0.$$

   Dunque:

$$s: \begin{cases} x - y + z + 2 = 0 \\ y + z = 0. \end{cases}$$

   La retta r ha parametri direttori $(-3, -1, 2)$, mentre $(0, 1, 1)$ sono le componenti di un vettore ortogonale a π. Questo significa che la retta t cercata ha parametri direttori (l, m, n) tali che:

$$\begin{cases} -3l - m + 2n = 0 \\ m + n = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} l = -m \\ n = -m. \end{cases}$$

   Quindi, possiamo prendere $(-1, 1, -1)$ come parametri direttori di t e abbiamo:

$$t: -x = y = -z \Rightarrow t: \begin{cases} x + y = 0 \\ x - z = 0. \end{cases}$$

2. La conica per $h = \infty$ ha equazione $x^2 + 2xy + 2x + 1 = 0$. Dunque, le sue matrici associate sono:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Essendo $|B| = -1 \neq 0$, $|A| = -1 < 0$ e $\text{Tr}(A) = 1 \neq 0$, concludiamo che questa conica è un'iperbole non equilatera.

Consideriamo, ora, le matrici associate al fascio di coniche:

$$B = \begin{pmatrix} h & h & h \\ h & 1 & 1 \\ h & 1 & h \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad A = \begin{pmatrix} h & h \\ h & 1 \end{pmatrix}.$$

Dato che $|B| = -h(h-1)^2$, per $h = 0$ e $h = 1$ otteniamo due coniche spezzate, che hanno equazioni $y(y+2) = 0$ e $(x+y+1)^2 = 0$, mentre per $h \neq 0, 1$ abbiamo coniche irriducibili.

Dal sistema:

$$\begin{cases} y(y+2) = 0 \\ (x+y+1)^2 = 0 \end{cases}$$

otteniamo che i punti base del fascio sono $(-1, 0)$ e $(1, -2)$, entrambi contati due volte. Inoltre, essendo $|A| = h - h^2$, vediamo che per $0 < h < 1$ abbiamo delle ellissi reali (in quanto i punti base sono reali), tra le quali non figurano circonferenze; per $h < 0$ e $h > 1$ abbiamo delle iperboli, tra le quali una equilatera per $h = -1$; non ci sono, invece, parabole nel fascio.

Cerchiamo, ora, la conica del fascio passante per il punto $A = (0, 1)$. Imponendo il passaggio troviamo $h = -3$. Dunque, la conica cercata è un'iperbole e ha equazione:

$$-3x^2 - 6xy + y^2 - 6x + 2y - 3 = 0.$$

Dalla matrice:

$$B = \begin{pmatrix} -3 & -3 & -3 \\ -3 & 1 & 1 \\ -3 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

otteniamo:

$$\begin{cases} -3x - 3y - 3 = 0 \\ -3x + y + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = -1, \end{cases}$$

per cui il centro di simmetria è il punto $C = (0, -1)$. Gli assi di simmetria sono le rette parallele agli autospazi della matrice A e passano per C. Da:

$$P_A(T) = \begin{vmatrix} -3-T & -3 \\ -3 & 1-T \end{vmatrix} = T^2 + 2T - 12$$

vediamo che gli autovalori di A sono $-1 \pm \sqrt{13}$. Gli autospazi a loro associati hanno equazioni $-3x + (2 - \sqrt{13})y = 0$ e $-3x + (2 + \sqrt{13})y = 0$. Le rette parallele ad essi e passanti per $C = (0, -1)$ sono gli assi di simmetria ed hanno equazioni:

$$-3x + (2 - \sqrt{13})y + 2 - \sqrt{13} = 0$$

e

$$-3x + (2 + \sqrt{13})y + 2 + \sqrt{13} = 0.$$

3. Le matrici associate alla quadriche sono:

$$B = \begin{pmatrix} h & 1 & 1 & 0 \\ 1 & h & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad A = \begin{pmatrix} h & 1 & 1 \\ 1 & h & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Dato che $|B| = 2h(1-h)$ e $|A| = (h-1)^2$, possiamo subito dire che per $h = 0$ abbiamo un cono. Per $h = 1$, dopo avere osservato che si ha $\rho(B) = 3$, concludiamo che abbiamo un cilindro.

Per $h \neq 0, 1$ abbiamo ellissoidi o iperboloidi. Da:

$$P_A(T) = \begin{vmatrix} h-T & 1 & 1 \\ 1 & h-T & 1 \\ 1 & 1 & 1-T \end{vmatrix} = -T^3 + (2h+1)T^2 + (-h^2 - 2h + 3)T + h^2 - 2h + 1$$

vediamo che abbiamo ellissoidi se uno dei seguenti sistemi ha soluzione:

$$\begin{cases} 2h+1<0 \\ -h^2-2h+3<0 \\ (h-1)^2<0 \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} 2h+1>0 \\ -h^2-2h+3<0 \\ (h-1)^2>0 \end{cases}$$

Il primo è impossibile, mentre il secondo ha soluzioni per $h>1$. Quindi, per $h>1$ abbiamo ellissoidi e per $h<1$, $h \neq 0$, iperboloidi. Osservando il segno del determinante di B concludiamo che per $h>1$ abbiamo degli ellissoidi reali, per $0<h<1$ abbiamo degli iperboloidi iperbolici, mentre per $h<0$ abbiamo degli iperboloidi ellittici.

4. Dal fatto che:

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -6 \neq 0,$$

concludiamo subito che le due rette sono sghembe. Le rette r e s hanno parametri direttori $(-1,1,1)$ e $(1,1,1)$. Quindi, è facile vedere che la retta t ha parametri direttori $(0,1,-1)$, cioè $P_\infty=(0,1,-1,0)$ è il punto improprio della retta t. Quindi, la retta t è intersezione dei piani contenenti r e s e passanti per P_∞.

I piani contenenti r hanno equazione:

$$\lambda(x-y+2z+1)+\mu(x+z-1)=0$$

e, imponendo il passaggio per P_∞, otteniamo $\mu=-3\lambda$, per cui abbiamo il piano $\pi_1\colon -2x-y-z+4=0$. Analogamente, i piani contenenti s hanno equazione:

$$\lambda(x-y+2)+\mu(y-z+1)=0.$$

Imponendo il passaggio per P_∞ abbiamo $\lambda=2\mu$ e otteniamo il piano $\pi_2\colon 2x-y-z+5=0$. Dunque:

$$t=\pi_1\cap\pi_2\colon \begin{cases} -2x-y-z+4=0 \\ 2x-y-z+5=0. \end{cases}$$