# Corso di Laurea in Ingegneria Industriale (F-O) e (P-Z)

Prova di **Algebra lineare e Geometria** - Appello 24 Aprile 2024

---

*Durata della prova: 3 ore.*
*È vietato uscire dall'aula prima di aver consegnato definitivamente il compito.*
*È vietato consultare libri o appunti.*

---

**I**

Sono dati la matrice:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & h \\ 0 & 2 & 2 & h \\ 0 & 0 & 0 & h \end{pmatrix},$$

al variare di $h \in \mathbb{R}$, e l'endomorfismo $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ tale che $M(f) = A + {}^{\mathrm{t}}A$.

1. **5 punti.** Studiare $f$, determinando in ciascun caso $\operatorname{Im} f$ e $\operatorname{Ker} f$ e le loro equazioni cartesiane.
2. **5 punti.** Diagonalizzare, se possibile, la matrice $A$ nei casi $h = 0$ e $h = 1$.
3. **5 punti.** È dato il sottospazio $V = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + y + z = 0\}$. Calcolare, al variare di $h \in \mathbb{R}$, $f(V)$, determinandone in ciascun caso la dimensione e le equazioni cartesiane.
4. **ESERCIZIO BONUS: 5 PUNTI.** È data la restrizione $f|_V : V \to \mathbb{R}^4$. Determinare il valore di $h \in \mathbb{R}$ per il quale esiste l'estensione $\varphi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ di $f|_V$ tale che $W = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid y = 0, z = 0\}$ è autospazio per $\varphi$. Determinare la matrice $M(\varphi)$.

*Soluzione*

1. Dal momento che:
$$M(f) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & h \\ 1 & 3 & 4 & h \\ 0 & h & h & 2h \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{riducendo}} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 & h \\ -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2h \end{pmatrix},$$
vediamo che per $h \neq 0$ $f$ è un isomorfismo, cioè $f$ è iniettiva e suriettiva, per cui $\operatorname{Ker} f = \{(0,0,0,0)\}$ e $\operatorname{Im} f = \mathbb{R}^4$.

   Sia $h = 0$. In tal caso, dalla riduzione precedente vediamo che $\dim \operatorname{Im} f = 3$ e una sua base è data da $[(2,1,1,0),(1,2,3,0),(1,3,4,0)]$. Da:
$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 3 & 4 & 0 \\ x & y & z & t \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 2t = 0$$
abbiamo che $\operatorname{Im} f = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid t = 0\}$. Inoltre, vediamo che $\dim \operatorname{Ker} f = 4 - 3 = 1$ e che:
$$\operatorname{Ker} f = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid 2x + y + z = 0,\ -3x + z = 0,\ -2x = 0\} = \mathscr{L}((0,0,0,1)).$$

2. Sia $h = 0$. In tal caso:
$$P_A(T) = \begin{vmatrix} 1-T & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1-T & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2-T & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -T \end{vmatrix} = T^2(T-1)(T-3).$$

Quindi, gli autovalori sono 0, 1 e 3, con $m_0 = 2$ e $m_1 = m_3 = 1$. Questo vuol dire che la matrice $A$ diagonalizzabile solo se $\dim V_0 = m_0 = 2$. Da:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{riducendo}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

vediamo che $\dim V_0 = 4-\rho(A) = 4-2 = 2 = m_0$, per cui per $h = 0$ $A$ è diagonalizzabile. Inoltre, dalla riduzione precedente abbiamo:

$$V_0 = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + y + z = 0,\ y + z = 0\} = \mathscr{L}((0,1,-1,0),(0,0,0,1)).$$

Sia $T = 1$. Da:

$$A - I = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{riducendo}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

vediamo che:

$$V_1 = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid y + z = 0,\ z = 0,\ -t = 0\} = \mathscr{L}((1,0,0,0)).$$

Sia $T = 3$. Da:

$$A - 3I = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

vediamo che:

$$V_3 = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid -2x + y + z = 0,\ -2y + z = 0,\ -3t = 0\} = \mathscr{L}((3,2,4,0)).$$

Dunque, una base di autovettori è $[(0,1,-1,0),(0,0,0,1),(1,0,0,0),(3,2,4,0)]$ e possiamo dire che $P^{-1}AP = D$, dove:

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Sia $h = 1$. In tal caso:

$$P_A(T) = \begin{vmatrix} 1-T & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1-T & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2-T & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1-T \end{vmatrix} = (1-T)^2 T(T-3).$$

In questo caso, gli autovalori sono 0, 1 e 3, con $m_0 = m_3 = 1$ e $m_1 = 2$, per cui la matrice $A$ è diagonalizzabile se $\dim V_1 = m_1 = 2$.

Sia $T = 1$. Da:

$$A - i = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{riducendo}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

vediamo che $\dim V_1 = 4 - \rho(A - I) = 4 - 3 = 1 < 2 = m_1$, per cui concludiamo che per $h = 1$ la matrice $A$ non è diagonalizzabile.

3. Dato che $V = \mathscr{L}((-1,1,0,0),(-1,0,1,0),(0,0,0,1))$, abbiamo:

$$f(V) = \mathscr{L}(f(-1,1,0,0), f(-1,0,1,0),(0,0,0,1)) = \mathscr{L}((-1,1,2,h),(-1,2,3,h),(0,h,h,2h)).$$

Dalla matrice:

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 & h \\ -1 & 2 & 3 & h \\ 0 & h & h & 2h \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{riducendo}} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 & h \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & h \end{pmatrix}$$

vediamo che $\dim f(V) = 3$ per $h \neq 0$ e $\dim f(V) = 2$ per $h = 0$. Inoltre, dalla riduzione precedente vediamo che per $h \neq 0$ si ha:

$$f(V) = \mathscr{L}((-1,1,2,h),(0,1,1,0),(0,0,0,h)) = \mathscr{L}((-1,1,2,h),(0,1,1,0),(0,0,0,1)).$$

Dunque, da:

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 & 2 & h \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ x & y & z & t \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow x - y + z = 0$$

abbiamo che per $h \neq 0$ si ha $f(V) = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid x - y + z = 0\}$.

Sia $h = 0$. In questo caso $f(V) = \mathscr{L}((-1,1,2,0),(0,1,1,0))$, per cui:

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ x & y & z & t \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{riducendo}} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & x-y+z & t \end{pmatrix}$$

abbiamo che per $h = 0$ si ha $f(V) = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid x - y + z = 0,\ t = 0\}$.

4. Siano $v_1 = (-1,1,0,0)$ e $v_2 = (-1,0,1,0)$. Abbiamo visto che $V = \mathscr{L}(v_1, v_2, v_3)$ e sappiamo che:

$$\varphi(v_1) = f|_V(v_1) = f(v_1) = (-1,1,2,h)$$
$$\varphi(v_2) = f|_V(v_2) = f(v_2) = (-1,2,3,h)$$
$$\varphi(e_4) = f|_V(e_4) = f(e_4) = (0,h,h,2h).$$

Inoltre, $W = \mathscr{L}((1,0,0,0),(0,0,0,1)) = \mathscr{L}(e_1, e_4)$, dove $e_4 \in V$ e $e_1 \notin V$. Quindi, $[v_1, v_2, e_4, e_1]$ è una base di $\mathbb{R}^4$ e i vettori $e_1$ ed $e_4$ devono essere autovettori. Questo vuol dire che la matrice:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & h & h & 2h \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{riducendo}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & h & h & 0 \end{pmatrix}$$

deve avere rango 1. Questo avviene solo so $h = 0$. Dunque, deve essere $\varphi(e_4) = (0,0,0,0)$, per cui $e_4$ è autovettore associato all'autovalore 0 e deve essere $W = V_0$. Di conseguenza sarà $\varphi(e_1) = (0,0,0,0)$. Dunque, abbiamo:

$$\begin{cases} \varphi(v_1) = (-1,1,2,0) \\ \varphi(v_2) = (-1,2,3,0) \\ \varphi(e_4) = (0,0,0,0) \\ \varphi(e_1) = (0,0,0,0) \end{cases} \Rightarrow M(\varphi) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

**II**

1. **5 punti.** È assegnato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}, u$. Sono dati i punti $A = (1,0,-1)$, $B = (0,1,1)$ e $C = (-1,1,1)$. Determinare il piano $\pi$ contenente $A$, $B$ e $C$. Data la retta $r\colon x - y + 1 = y - z = 0$, determinare la retta $s$ simmetrica di $r$ rispetto al piano $\alpha\colon x + z = 0$.

2. **5 punti.** È assegnato nel piano un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $O, \vec{x}, \vec{y}, u$. Studiare il fascio di coniche di equazione:

$$x^2 + 2hxy + y^2 - h - 1 = 0,$$

determinandone, in particolare, punti base e coniche spezzate. Determinare gli assi di simmetria dell'iperbole avente $x + 2y = 0$ come asintoto.

3. **5 punti.** È assegnato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}, u$. Determinare il cono e il cilindro aventi vertici, rispettivamente, $V = (0,1,1)$ e $V' = (1,2,1,0)$ e contenenti la conica:

$$\Gamma\colon \begin{cases} xy - 1 = 0 \\ z = 0. \end{cases}$$

Stabilire la natura del cilindro.

*Soluzione*

1. Il piano contenente i punti $A$, $B$ e $C$ è il piano contenente la retta $BC$ e passante per $A$. Dato che:

$$BC\colon \begin{cases} y - 1 = 0 \\ z - 1 = 0, \end{cases}$$

i piani che la contengono hanno equazione $\lambda(y-1) + \mu(z-1) = 0$. Quando imponiamo il passaggio per $A$, abbiamo $\lambda = -2\mu$ e abbiamo $\pi\colon 2y - z - 1 = 0$.

Per quanto riguarda la retta $s$, cominciamo con l'osservare che la retta $r$ ha parametri direttori $(1,1,1)$, per cui non è parallela al piano $\alpha$. Questo vuol dire che retta $r$ e piano $\alpha$ sono incidenti:

$$P = r \cap \alpha\colon \begin{cases} x - y + 1 = 0 \\ y - z = 0 \\ x + z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -\dfrac{1}{2} \\ y = \dfrac{1}{2} \\ z = \dfrac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow P = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right).$$

Prendiamo un qualsiasi punto di $s$, per esempio $Q = (-1,0,0)$ e sia $p$ la retta passante per $P$ ortogonal al piano $\alpha$:

$$p\colon \begin{cases} x = -1 + t \\ y = 0 \\ z = t. \end{cases}$$

Dal momento che:

$$H = p \cap \alpha\colon \begin{cases} x = -1 + t \\ y = 0 \\ z = t \\ x + z = 0 \end{cases} \Rightarrow H = \left(-\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\right).$$

Il punto $Q' = (a,b,c)$ simmetrico di $Q$ rispetto ad $\alpha$ è il simmetrico di $Q$ rispetto al punto $H$:

$$\begin{cases} \dfrac{a-1}{2} = -\dfrac{1}{2} \\ \dfrac{b}{2} = 0 \\ \dfrac{c}{2} = \dfrac{1}{2}. \end{cases}$$

Quindi, $Q' = (0,0,1)$ e abbiamo:

$$s = PQ'\colon \begin{cases} x - z + 1 = 0 \\ x + y = 0. \end{cases}$$

2. Osserviamo che per $h = \infty$ abbiamo l'iperbole equilatera di equazione $2xy - 1 = 0$. Inoltre, da:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & h & 0 \\ h & 1 & 0 \\ 0 & 0 & --h-1 \end{pmatrix}$$

abbiamo $|B| = (-h-1)(1-h^2)$. Quindi, per $h \neq \pm 1$ le coniche sono irriducibili, mentre per $h = 1$ e $h = -1$ abbiamo le coniche spezzate di equazioni, rispettivamente, $(x+y+\sqrt{2})(x+y-\sqrt{2}) = 0$ e $(x-y)^2 = 0$. Intersechiamo queste due coniche per trovare i punti base del fascio:

$$\begin{cases} (x+y+\sqrt{2})(x+y-\sqrt{2}) = 0 \\ (x-y)^2 = 0, \end{cases}$$

da cui otteniamo i punti $(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2})$ e $(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$, entrambi contati due volte. Inoltre abbiamo $|A| = 1-h^2$, per cui per $-1 < h < 1$ abbiamo delle ellissi, tutte reali, tra le quali figura una circonferenza per $h = 0$; per $h$ $pm1$ abbiamo delle coniche spezzate; per $h < -1$ e $h > 1$ abbiamo delle iperboli. L'unica iperbole equilatera del fascio è la conica di equazione $2xy - 1 = 0$.

Per trovare l'iperbole richiesta dobbiamo determinare la conica del fascio passante per il punto improprio della retta $x + 2y = 0$, che è il punto $(2, -1, 0)$. Quando imponiamo il passaggio troviamo $h = \frac{5}{4}$, per cui abbiamo l'iperbole:

$$4x^2 + 5xy + 4y^2 - 9 = 0.$$

È immediato vedere che il centro di simmetria della conica è il punto $(0,0)$. Inoltre, da:

$$P_A(T) = \begin{vmatrix} 4-T & 5 \\ 5 & 4-T \end{vmatrix} = T^2 - 8T - 9$$

vediamo che gli autovalori sono 9 e $-1$. Gli assi di simmetria sono le rette parallele agli autospazi e passanti per $(0,0)$. È facile vedere che sono le rette di equazione $x + y = 0$ e $x - y = 0$.

3. Le quadriche contenenti la conica data hanno equazione:

$$xy - 1 + z(ax + by + cz + d) = 0.$$

Il cono $Q$ cercato è tale che si ha:

$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{a}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{b}{2} & 0 \\ \frac{a}{2} & \frac{b}{2} & c & \frac{d}{2} \\ 0 & 0 & \frac{d}{2} & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{a}{2} + 1 = 0 \\ \frac{b}{2} = 0 \\ \frac{b}{2} + c + \frac{d}{2} = 0 \\ \frac{d}{2} - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -2 \\ b = 0 \\ c = -1 \\ d = 2. \end{cases}$$

Dunque, $Q\colon\ xy - 2xz - z^2 + 2z - 1 = 0$.

Il cilindro $Q'$ cercato è tale che si ha:

$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{a}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{b}{2} & 0 \\ \frac{a}{2} & \frac{b}{2} & c & \frac{d}{2} \\ 0 & 0 & \frac{d}{2} & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{a}{2}+1=0 \\ \dfrac{b}{2}+\dfrac{1}{2}=0 \\ \dfrac{a}{2}+b+c=0 \\ \dfrac{d}{2}=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=-2 \\ b=-1 \\ c=2 \\ d=0. \end{cases}$$

Dunque, $Q'\colon\ xy-2xz-yz+2z^2-1=0$.