Corso di Laurea in Ingegneria Elettronica

Prova di **Algebra lineare e Geometria** - Appello 24 Gennaio 2024

Durata della prova: 3 ore.
È vietato uscire dall'aula prima di aver consegnato definitivamente il compito.
È vietato consultare libri o appunti. Compito B

I

Sia $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'endomorfismo definito, al variare di $k \in \mathbb{R}$, dalle assegnazioni:

$$\begin{aligned} f(1,1,1) &= (-1,-1,-1) \\ f(1,0,1) &= (0,0,k-1) \\ f(0,0,1) &= (k-1,1,k). \end{aligned}$$

1. **5 punti.** Studiare f al variare di $k \in \mathbb{R}$, determinando in ciascun caso $\operatorname{Im} f$ e $\operatorname{Ker} f$ e le loro equazioni cartesiane.

2. **5 punti.** Studiare la semplicità di f nei casi $k = 3$ e $k = 4$, determinando, se possibile, una base di autovettori per f.

3. **5 punti.** È dato l'endomorfismo $g\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ tale che:
$$M(g) = \begin{pmatrix} k+1 & -2 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & -k \\ 0 & -2 & -k & 1 \\ 0 & -2 & -1 & 1 \end{pmatrix},$$
al variare di $k \in \mathbb{R}$. Sono dati $U = \mathscr{L}((1,0,1,0),(0,1,0,1))$ e $W = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid x+y+z = 0, 2x-z+t = 0\}$. Determinare:
   - le equazioni cartesiane di U;
   - la controimmagine $g^{-1}(W)$ al variare di $k \in \mathbb{R}$, specificandone in ciascun caso la dimensione;
   - $g^{-1}(W) \cap U$ al variare di $k \in \mathbb{R}$, specificandone in ciascun caso la dimensione.

4. **ESERCIZIO BONUS: 5 PUNTI.** È dato $V = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid y = 0, z-t = 0\}$. Determinare il valore di $k \in \mathbb{R}$ per il quale $g|_V$ induce un endomorfismo $\varphi\colon V \to V$ e mostrare che tale endomorfismo è semplice.

Soluzione

1. È facile vedere che $\mathscr{A} = [v_1, v_2, v_3]$, con $v_1 = (1,1,1)$, $v_2 = (1,0,1)$, $v_3 = (0,0,1)$ è una base di $\mathbb{R}^3$. In questo caso, si vede anche che:
$$M^{\mathscr{A}}(f) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & k-2 \\ 0 & k-1 & 1 \end{pmatrix}.$$
Quindi, $|M^{\mathscr{A}}(f)| = (k-1)(k-2)$, per cui possiamo dire che per $k \neq 1,2$ l'endomorfismo f è un isomorfismo. In particolare, si ha che f è iniettiva e suriettiva, per cui $\operatorname{Im} f = \mathbb{R}^3$ e $\operatorname{Ker} f = \{(0,0,0)\}$.

   Sia $k = 1$. In questo caso:
$$M^{\mathscr{A}}(f) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Quindi, $\dim \operatorname{Im} f = \rho(M^{\mathscr{A}}(f)) = 2$ e una sua base è data da $[f(v_1), f(v_3)] = [(-1,-1,-1),(0,1,1)]$. Da:

$$\begin{vmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ x & y & z \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow y - z = 0$$

vediamo che $\operatorname{Im} f = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid y - z = 0\}$. Inoltre, $\dim \operatorname{Ker} f = 3 - 2 = 1$ e:

$$\operatorname{Ker} f = \{v \in \mathbb{R}^3 \mid [v]_{\mathscr{A}} = (a,b,c),\, -a + c = 0,\, c = 0\} = \mathscr{L}(v_2) = \mathscr{L}((1,0,1)).$$

Da:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ x & y & z \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{riducendo}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ x - z & y & 0 \end{pmatrix}$$

abbiamo:

$$\operatorname{Ker} f = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - z = 0,\, y = 0\}.$$

Sia $k = 2$. In questo caso:

$$M^{\mathscr{A}}(f) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Quindi, $\dim \operatorname{Im} f = \rho(M^{\mathscr{A}}(f)) = 2$ e una sua base è data da $[f(v_1), f(v_2)] = [(-1,-1,-1),(0,0,1)]$. Da:

$$\begin{vmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ x & y & z \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow -x + y = 0$$

vediamo che $\operatorname{Im} f = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - y = 0\}$. Inoltre, $\dim \operatorname{Ker} f = 3 - 2 = 1$ e:

$$\operatorname{Ker} f = \{v \in \mathbb{R}^3 \mid [v]_{\mathscr{A}} = (a,b,c),\, -a + c = 0,\, b + c = 0\} = \mathscr{L}(v_1 - v_2 + v_3) = \mathscr{L}((0,1,1)).$$

Da:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ x & y & z \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{riducendo}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ x & y - z & 0 \end{pmatrix}$$

abbiamo:

$$\operatorname{Ker} f = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = 0,\, y - z = 0\}.$$

2. Sia $k = 3$. In tal caso:

$$P(T) = \begin{vmatrix} -1 - T & 0 & 1 \\ 0 & -T & 1 \\ 0 & 2 & 1 - T \end{vmatrix} = (-1 - T)(T^2 - T - 2),$$

per cui gli autovalori sono -1 e 2, con $m_{-1} = 2$ e $m_2 = 1$. Sappiamo che deve essere $\dim V_2 = m_2 = 1$, mentre $1 \le \dim V_{-1} \le 2 = m_{-1}$, per cui possiamo dire che per $h = 2$ f è semplice se e solo se $\dim V_{-1} = m_{-1} = 2$.

Sia, dunque, $T = -1$. Sappiamo che $V_{-1} = \operatorname{Ker} f_{-1}$, dove $f_{-1} = f + i$ e:

$$M^{\mathscr{A}}(f_{-1}) = M^{\mathscr{A}}(f) + I = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

È immediato vedere che $\rho(M^{\mathscr{A}}(f_{-1}))) = 2$, per cui $\dim V_{-1} = 3 - 2 = 1 < 2 = m_{-1}$. Questo vuol dire che per $k = 3$ f non è semplice e non è possibile, in questo caso, determinare una base di autovettori per f.

Sia $k = 4$. In tal caso:

$$P(T) = \begin{vmatrix} -1 - T & 0 & 1 \\ 0 & -T & 2 \\ 0 & 3 & 1 - T \end{vmatrix} = (-1 - T)(T^2 - T - 6),$$

per cui gli autovalori sono -1, -2 e 3, tutti distinti di molteplicità algebrica 1, per cui possiamo dire subito che per $h = 3$ f è semplice.

Sia $T=-1$. Dato che $m_{-1}=1$, deve essere $\dim V_{-1}=m_{-1}=1$. Inoltre, dalle assgnazioni date per f sappiamo che $v_1\in V_{-1}$. Quindi, necessariamente deve essere $V_{-1}=\mathscr{L}(v_1)=\mathscr{L}((1,1,1))$.

Sia $T=-2$. Sappiamo che $V_{-2}=\operatorname{Ker} f_{-2}$, dove $f_{-2}=f+2i$ e:

$$M^{\mathscr{A}}(f_{-2})=M^{\mathscr{A}}(f)+2I=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&2&2\\0&3&3\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{riducendo}}=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&2&2\\0&0&0\end{pmatrix}.$$

Quindi:

$$V_{-2}=\{v\in\mathbb{R}^3\mid[v]_{\mathscr{A}}=(a,b,c),\ a+c=0,\ b+c=0\}=\mathscr{L}(-v_1-v_2+v_3)=\mathscr{L}((-2,-1,-1)).$$

Sia $T=3$. Sappiamo che $V_3=\operatorname{Ker} f_3$, dove $f_3=f-3i$ e:

$$M^{\mathscr{A}}(f_3)=M^{\mathscr{A}}(f)-3I=\begin{pmatrix}-4&0&1\\0&-3&2\\0&3&-2\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{riducendo}}=\begin{pmatrix}-4&0&1\\0&-3&2\\0&0&0\end{pmatrix}.$$

Quindi:

$$V_3=\{v\in\mathbb{R}^3\mid[v]_{\mathscr{A}}=(a,b,c),\ -4a+c=0,\ -3b+2c=0\}=\mathscr{L}(3v_1+8v_2+12v_3)=\mathscr{L}((11,3,23)).$$

Quindi, per $k=4$ una base di autovettori è data da $[(1,1,1),(-2,-1,-1),(11,3,23)]$.

3. Da:

$$\begin{pmatrix}1&0&1&0\\0&1&0&1\\x&y&z&t\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{riducendo}}\begin{pmatrix}1&0&1&0\\0&1&0&1\\x-z&y-t&0&0\end{pmatrix}$$

vediamo subuto che $U=\{(x,yz,t)\in\mathbb{R}^4\mid x-z=0,\ y-t=0\}$.

Inoltre, dalla matrice di g vediamo subito che per ogni $(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4$ si ha:

$$g(x,y,z,t)=((k+1)x-2y-z-t,2y+z-kt,-2y-kz+t,-2y-z+t),$$

per cui:

$$g^{-1}(W)=\{(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4\mid(k+1)x-2y-kz-kt=0,\ (2k+2)x-4y+(k-3)z-2t=0\}.$$

Da:

$$\begin{pmatrix}k+1&-2&-k&-k\\2k+2&-4&k-3&-2\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{riducendo}}\begin{pmatrix}k+1&-2&-k&-k\\0&0&3k-3&2k-2\end{pmatrix}$$

vediamo che per $k\neq 1$ $\dim g^{-1}(W)=2$ e per $k=1$ $\dim g^{-1}(W)=3$.

Infine:

$$g^{-1}(W)\cap U=\{(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4\mid(k+1)x-2y-kz-kt=0,\ (2k+2)x-4y+(k-3)z-2t=0,\ x-z=0,\ y-t=0\}.$$

Da:

$$\begin{pmatrix}1&0&-1&0\\0&1&0&-1\\k+1&-2&-k&-k\\2k+2&-4&k-3&2k-2\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{riducendo}}\begin{pmatrix}1&0&-1&0\\0&1&0&-1\\0&0&1&-k+2\\0&0&0&3k^2-7k+4\end{pmatrix}$$

vediamo che per $k\neq 1,\frac{4}{3}$ si ha $\dim(g^{-1}(W)\cap U)=0$, per cui $g^{-1}(W)\cap U=\{(0,0,0,0)\}$. Per $k=1$ e $k=\frac{4}{3}$ abbiamo $\dim(g^{-1}(W)\cap U)=1$ ed esattamente abbiamo $g^{-1}(W)\cap U=\mathscr{L}((-1,1,-1,1))$ per $k=1$ e $g^{-1}(W)\cap U=\mathscr{L}((-2,3,-2,3))$ per $k=\frac{4}{3}$.

4. Siano $u_1=(1,0,0,0)$ e $u_2=(0,0,1,1)$. Sappiamo che $V=\mathscr{L}(u_1,u_2)$, per cui $g(V)=\mathscr{L}(g(u_1),g(u_2))$. Dato che:

$$g(u_1)=(k+1,0,0,0)\in V$$

$$g(u_2)=(-2,-k+1,-k+1,0)\in V\Leftrightarrow -k+1=0\Leftrightarrow k=1,$$

vediamo che è per $k = 1$ che la $g|_V$ induce un endomorfismo $\varphi\colon V \to V$ definito da:

$$\varphi(u_1) = g(u_1) = (2, 0, 0, 0) = 2u_1$$
$$\varphi(u_2) = g(u_2) = (-2, 0, 0, 0) = -2u_1.$$

Quindi, se $\mathscr{B} = [u_1, u_2]$, possiamo dire che:

$$M^{\mathscr{B}}(\varphi) = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Essendo:

$$P(T) = \begin{vmatrix} 2-T & -2 \\ 0 & -T \end{vmatrix} = -T(2-T),$$

vediamo che gli autovalori sono 0 e 2, distinti, perciò, tra loro, per cui possiamo dire che φ è semplice.

II

1. **5 punti.** È assegnato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}, u$. Sono dati:

$$r\colon \begin{cases} x + y - z + 1 = 0 \\ x + 3y + z - 2 = 0 \end{cases} \quad \text{e} \quad \pi\colon x + y = 0$$

e il punto $P = (1, 0, 1)$. Determinare la retta s ortogonale a r, parallela a π e passante per P e il punto P' simmetrico di P rispetto a π.

2. **5 punti.** È assegnato nel piano un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $O, \vec{x}, \vec{y}, u$. Studiare il fascio di coniche di equazione:

$$x^2 + 2hxy + hy^2 - 2x - 2y + 1 = 0,$$

determinandone, in particolare, punti base e coniche spezzate. Determinare gli asintoti dell'iperbole equilatera del fascio.

3. **5 punti.** È assegnato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}, u$. Determinare e studiare le quadriche contenenti la conica:

$$\Gamma\colon \begin{cases} y^2 - x = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

e i punti $P_1 = (0, 1, 1)$, $P_2 = (1, 0, 1)$ e $P_3 = (1, 0, -1)$.

Soluzione

1. È facile vedere che la retta r ha parametri direttori $(2, -1, 1)$. Quindi, se (l, m, n) sono parametri direttori di s deve accadere che:

$$\begin{cases} 2l - m + n = 0 \\ l + m = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} n = -3l \\ m = -l. \end{cases}$$

Quindi, possiamo dire che $(1, -1, -3)$ sono parametri direttori di s e:

$$s\colon x - 1 = -y = \frac{z-1}{-3} \Rightarrow s\colon \begin{cases} x + y - 1 = 0 \\ 3y - z + 1 = 0. \end{cases}$$

Per trovare il punto P', dobbiamo determinare la retta t passante per P e ortogonale a π e il punto $H = t \cap \pi$. Il punto P' è il simmetrico di P rispetto a H. Si vede cfailmente che:

$$t\colon \begin{cases} x = 1 + t \\ y = t \\ z = 1 \end{cases} \Rightarrow H = t \cap \pi\colon \begin{cases} x = 1 + t \\ y = t \\ z = 1 \\ x + y = 0 \end{cases} \Rightarrow H = (\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}, 1).$$

Quindi, dovendo essere P' il simmetrico di P rispetto a H, cioè dovendo essere H il punto medio di P e P', si vede facilmente che $P' = (0, -1, 1)$.

2. La conica nascosta del fascio ha equazione $y(2x+y)=0$, per cui è una conica spezzata. Da:

$$|B| = \begin{vmatrix} 1 & h & -1 \\ h & h & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -(h-1)^2$$

vediamo che per $h \neq 1$ abbiamo coniche irriducibili, mentre per $h = 1$ abbiamo una conica spezzata che ha equazione $(x+y-1)^2 = 0$. Per quanto riguarda i punti base, essi sono dati da:

$$\begin{cases} y(2x+y) = 0 \\ (x+y-1)^2 = 0, \end{cases}$$

per cui abbiamo i punti $(1,0)$ e $(-1,2)$, entrambi contati due volte. Inoltre:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & h \\ h & h \end{vmatrix} = h - h^2,$$

per ui per $0 < h < 1$ abbiamo delle ellissi reali (in quanto i punti base sono reali); non figurano circonferenze nel fascio; per $h = 0$ abbiamo una parabola, mentre per $h = 1$ è spezzata; per $h < 0$ e $h > 1$ abbiamo delle iperboli, tra le quali figura una equilatera per $h = -1$.

L'iperbole equilatera ha equazione:

$$x^2 - 2xy - y^2 - 2x - 2y + 1 = 0.$$

Il suo centro di simmetria è dato dal sistema associato alle prime due righe della matrice B:

$$\begin{cases} x - y - 1 = 0 \\ -x - y - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = -1. \end{cases}$$

Quindi, il centro di simmetria è il punto $C = (0,-1)$. Per trovare gli asintoti, dobbiamo determinare i punti impropri dell'iperbole:

$$\begin{cases} x^2 - 2xy - y^2 - 2xt - 2yt + t^2 = 0 \\ t = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 - 2xy - y^2 = 0 \\ t = 0. \end{cases}$$

Troviamo i punti impropri $P_1^\infty = (1+\sqrt{2}, 1, 0)$ e $P_2^\infty = (1-\sqrt{2}, 1, 0)$. Gli asintoti sono le rette CP_1^∞ e CP_2^∞, per cui hanno equazioni $x - (1+\sqrt{2})y - 1 - \sqrt{2} = 0$ e $x - (1-\sqrt{2})y - 1 + \sqrt{2} = 0$.

3. Le quadriche contenenti la conica data hanno equazione:

$$y^2 - x + z(ax + by + cz + d) = 0.$$

Imponendo il passaggio per i punti dati, abbiamo:

$$\begin{cases} a + c + d = 1 \\ b + c + d = -1 \\ -a + c - d = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = -d - 2 \\ a = -d \\ c = 1. \end{cases}$$

Quindi, le quadriche cercate hanno equazione:

$$y^2 + (-d-2)yz - dxz + z^2 - x + dz = 0.$$

Dunque:

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\frac{d}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & \frac{-d-2}{2} & 0 \\ -\frac{d}{2} & \frac{-d-2}{2} & 1 & \frac{d}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{d}{2} & 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\frac{d}{2} \\ 0 & 1 & \frac{-d-2}{2} \\ -\frac{d}{2} & -\frac{d}{2} & 1 \end{pmatrix}.$$

Vediamo che $|B| = \frac{5d^2+4d}{16}$ e $|A| = -\frac{d^2}{4}$. Quindi, per $d = 0$ abbiamo $|B| = |A| = 0$ e $\rho(B) = 3$, per cui abbiamo un cilindro. Per $d = -\frac{4}{5}$ abbiamo $|B| = 0$ e $|A| \neq 0$, per cui abbiamo un cono. Per $d \neq 0, -\frac{4}{5}$ abbiamo ellissoidi o iperboloidi, ma la conica Γ è una parabola. Quindi, non ci possono essere ellissoidi tra le quadriche. Questo vuol dire che per $d < -\frac{4}{5}$ e $d > 0$ abbiamo degli ieprboloidi iperbolici, mentre per $-\frac{4}{5} < d < 0$ abbiamo degli iperboloidi ellittici.