Corso di Laurea in Ingegneria Elettronica

Prova di **Algebra lineare e Geometria** - Appello 24 Gennaio 2024

Durata della prova: 3 ore.
È vietato uscire dall'aula prima di aver consegnato definitivamente il compito.
È vietato consultare libri o appunti. Compito A

I

Sia $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'endomorfismo definito, al variare di $h \in \mathbb{R}$, dalle assegnazioni:

$$\begin{aligned} f(1,1,1) &= (-1,-1,-1) \\ f(1,0,1) &= (0,0,h) \\ f(0,0,1) &= (h,1,h+1). \end{aligned}$$

1. **5 punti.** Studiare f al variare di $h \in \mathbb{R}$, determinando in ciascun caso $\operatorname{Im} f$ e $\operatorname{Ker} f$ e le loro equazioni cartesiane.
2. **5 punti.** Studiare la semplicità di f nei casi $h = 2$ e $h = 3$, determinando, se possibile, una base di autovettori per f.
3. **5 punti.** È dato l'endomorfismo $g\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ tale che:
$$M(g) = \begin{pmatrix} 1-h & -2 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & h \\ 0 & -2 & h & 1 \\ 0 & -2 & -1 & 1 \end{pmatrix},$$
al variare di $h \in \mathbb{R}$. Sono dati $U = \mathscr{L}((1,0,1,0),(0,1,0,1))$ e $W = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid x+y+z=0, 2x-z+t=0\}$. Determinare:
   - le equazioni cartesiane di U;
   - la controimmagine $g^{-1}(W)$ al variare di $h \in \mathbb{R}$, specificandone in ciascun caso la dimensione;
   - $g^{-1}(W) \cap U$ al variare di $h \in \mathbb{R}$, specificandone in ciascun caso la dimensione.
4. **ESERCIZIO BONUS: 5 PUNTI.** È dato $V = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid y = 0, z-t = 0\}$. Determinare il valore di $h \in \mathbb{R}$ per il quale $g|_V$ induce un endomorfismo $\varphi\colon V \to V$ e mostrare che tale endomorfismo è semplice.

Soluzione

1. È facile vedere che $\mathscr{A} = [v_1, v_2, v_3]$, con $v_1 = (1,1,1)$, $v_2 = (1,0,1)$, $v_3 = (0,0,1)$ è una base di $\mathbb{R}^3$. In questo caso, si vede anche che:
$$M^{\mathscr{A}}(f) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & h-1 \\ 0 & h & 1 \end{pmatrix}.$$
Quindi, $|M^{\mathscr{A}}(f)| = h(h-1)$, per cui possiamo dire che per $h \neq 0,1$ l'endomorfismo f è un isomorfismo. In particolare, si ha che f è iniettiva e suriettiva, per cui $\operatorname{Im} f = \mathbb{R}^3$ e $\operatorname{Ker} f = \{(0,0,0)\}$.

   Sia $h = 0$. In questo caso:
$$M^{\mathscr{A}}(f) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Quindi, $\dim \operatorname{Im} f = \rho(M^{\mathscr{A}}(f)) = 2$ e una sua base è data da $[f(v_1), f(v_3)] = [(-1,-1,-1),(0,1,1)]$. Da:

$$\begin{vmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ x & y & z \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow y - z = 0$$

vediamo che $\operatorname{Im} f = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid y - z = 0\}$. Inoltre, $\dim \operatorname{Ker} f = 3 - 2 = 1$ e:

$$\operatorname{Ker} f = \{v \in \mathbb{R}^3 \mid [v]_{\mathscr{A}} = (a,b,c),\ -a + c = 0,\ c = 0\} = \mathscr{L}(v_2) = \mathscr{L}((1,0,1)).$$

Da:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ x & y & z \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{riducendo}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ x - z & y & 0 \end{pmatrix}$$

abbiamo:

$$\operatorname{Ker} f = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - z = 0,\ y = 0\}.$$

Sia $h = 1$. In questo caso:

$$M^{\mathscr{A}}(f) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Quindi, $\dim \operatorname{Im} f = \rho(M^{\mathscr{A}}(f)) = 2$ e una sua base è data da $[f(v_1), f(v_2)] = [(-1,-1,-1),(0,0,1)]$. Da:

$$\begin{vmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ x & y & z \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow -x + y = 0$$

vediamo che $\operatorname{Im} f = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - y = 0\}$. Inoltre, $\dim \operatorname{Ker} f = 3 - 2 = 1$ e:

$$\operatorname{Ker} f = \{v \in \mathbb{R}^3 \mid [v]_{\mathscr{A}} = (a,b,c),\ -a + c = 0,\ b + c = 0\} = \mathscr{L}(v_1 - v_2 + v_3) = \mathscr{L}((0,1,1)).$$

Da:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ x & y & z \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{riducendo}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ x & y - z & 0 \end{pmatrix}$$

abbiamo:

$$\operatorname{Ker} f = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = 0,\ y - z = 0\}.$$

2. Sia $h = 2$. In tal caso:

$$P(T) = \begin{vmatrix} -1 - T & 0 & 1 \\ 0 & -T & 1 \\ 0 & 2 & 1 - T \end{vmatrix} = (-1 - T)(T^2 - T - 2),$$

per cui gli autovalori sono -1 e 2, con $m_{-1} = 2$ e $m_2 = 1$. Sappiamo che deve essere $\dim V_2 = m_2 = 1$, mentre $1 \le \dim V_{-1} \le 2 = m_{-1}$, per cui possiamo dire che per $h = 2$ f è semplice se e solo se $\dim V_{-1} = m_{-1} = 2$.

Sia, dunque, $T = -1$. Sappiamo che $V_{-1} = \operatorname{Ker} f_{-1}$, dove $f_{-1} = f + i$ e:

$$M^{\mathscr{A}}(f_{-1}) = M^{\mathscr{A}}(f) + I = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

È immediato vedere che $\rho(M^{\mathscr{A}}(f_{-1}))) = 2$, per cui $\dim V_{-1} = 3 - 2 = 1 < 2 = m_{-1}$. Questo vuol dire che per $h = 2$ f non è semplice e non è possibile, in questo caso, determinare una base di autovettori per f.

Sia $h = 3$. In tal caso:

$$P(T) = \begin{vmatrix} -1 - T & 0 & 1 \\ 0 & -T & 2 \\ 0 & 3 & 1 - T \end{vmatrix} = (-1 - T)(T^2 - T - 6),$$

per cui gli autovalori sono -1, -2 e 3, tutti distinti di molteplicità algebrica 1, per cui possiamo dire subito che per $h = 3$ f è semplice.

Sia $T = -1$. Dato che $m_{-1} = 1$, deve essere $\dim V_{-1} = m_{-1} = 1$. Inoltre, dalle assgnazioni date per f sappiamo che $v_1 \in V_{-1}$. Quindi, necessariamente deve essere $V_{-1} = \mathscr{L}(v_1) = \mathscr{L}((1,1,1))$.

Sia $T = -2$. Sappiamo che $V_{-2} = \operatorname{Ker} f_{-2}$, dove $f_{-2} = f + 2i$ e:

$$M^{\mathscr{A}}(f_{-2}) = M^{\mathscr{A}}(f) + 2I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{riducendo}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Quindi:

$$V_{-2} = \{v \in \mathbb{R}^3 \mid [v]_{\mathscr{A}} = (a,b,c),\ a + c = 0,\ b + c = 0\} = \mathscr{L}(-v_1 - v_2 + v_3) = \mathscr{L}((-2,-1,-1)).$$

Sia $T = 3$. Sappiamo che $V_3 = \operatorname{Ker} f_3$, dove $f_3 = f - 3i$ e:

$$M^{\mathscr{A}}(f_3) = M^{\mathscr{A}}(f) - 3I = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 2 \\ 0 & 3 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{riducendo}} = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Quindi:

$$V_3 = \{v \in \mathbb{R}^3 \mid [v]_{\mathscr{A}} = (a,b,c),\ -4a + c = 0,\ -3b + 2c = 0\} = \mathscr{L}(3v_1 + 8v_2 + 12v_3) = \mathscr{L}((11,3,23)).$$

Quindi, per $h = 3$ una base di autovettori è data da $[(1,1,1),(-2,-1,-1),(11,3,23)]$.

3. Da:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ x & y & z & t \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{riducendo}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ x-z & y-t & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

vediamo subuto che $U = \{(x, yz, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x - z = 0,\ y - t = 0\}$.

Inoltre, dalla matrice di g vediamo subito che per ogni $(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4$ si ha:

$$g(x,y,z,t) = ((1-h)x - 2y - z - t, 2y + z + ht, -2y + hz + t, -2y - z + t),$$

per cui:

$$g^{-1}(W) = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid (1-h)x - 2y + hz + ht = 0,\ (2-2h)x - 4y + (-h-3)z - 2t = 0\}.$$

Da:

$$\begin{pmatrix} 1-h & -2 & h & h \\ 2-2h & -4 & -h-3 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{riducendo}} \begin{pmatrix} 1-h & -2 & h & h \\ 0 & 0 & -3h-3 & -2h-2 \end{pmatrix}$$

vediamo che per $h \neq -1$ $\dim g^{-1}(W) = 2$ e per $h = -1$ $\dim g^{-1}(W) = 3$.

Infine:

$$g^{-1}(W) \cap U = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid (1-h)x - 2y + hz + ht = 0,\ (2-2h)x - 4y + (-h-3)z - 2t = 0,\ x - z = 0,\ y - t = 0\}.$$

Da:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1-h & -2 & h & h \\ 2-2h & -4 & -h-3 & -2h-2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{riducendo}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & h+2 \\ 0 & 0 & 0 & 3h^2+7h+4 \end{pmatrix}$$

vediamo che per $h \neq -1, -\frac{4}{3}$ si ha $\dim(g^{-1}(W) \cap U) = 0$, per cui $g^{-1}(W) \cap U = \{(0,0,0,0)\}$. Per $h = -1$ e $h = -\frac{4}{3}$ abbiamo $\dim(g^{-1}(W) \cap U) = 1$ ed esattamente abbiamo $g^{-1}(W) \cap U = \mathscr{L}((-1,1,-1,1))$ per $h = -1$ e $g^{-1}(W) \cap U = \mathscr{L}((-2,3,-2,3))$ per $h = -\frac{4}{3}$.

4. Siano $u_1 = (1,0,0,0)$ e $u_2 = (0,0,1,1)$. Sappiamo che $V = \mathscr{L}(u_1, u_2)$, per cui $g(V) = \mathscr{L}(g(u_1), g(u_2))$. Dato che:

$$g(u_1) = (1-h, 0, 0, 0) \in V$$

$$g(u_2) = (-2, h+1, h+1, 0) \in V \Leftrightarrow h + 1 = 0 \Leftrightarrow h = -1,$$

vediamo che è per $h = -1$ che la $g|_V$ induce un endomorfismo $\varphi\colon V \to V$ definito da:

$$\varphi(u_1) = g(u_1) = (2,0,0,0) = 2u_1$$
$$\varphi(u_2) = g(u_2) = (-2,0,0,0) = -2u_1.$$

Quindi, se $\mathscr{B} = [u_1, u_2]$, possiamo dire che:

$$M^{\mathscr{B}}(\varphi) = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Essendo:

$$P(T) = \begin{vmatrix} 2-T & -2 \\ 0 & -T \end{vmatrix} = -T(2-T),$$

vediamo che gli autovalori sono 0 e 2, distinti, perciò, tra loro, per cui possiamo dire che φ è semplice.

II

1. **5 punti.** È assegnato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}, u$. Sono dati:

$$r\colon \begin{cases} x - y + z + 1 = 0 \\ 3x + y + z - 2 = 0 \end{cases} \quad \text{e} \quad \pi\colon x + z = 0$$

e il punto $P = (0,1,1)$. Determinare la retta s ortogonale a r, parallela a π e passante per P e il punto P' simmetrico di P rispetto a π.

2. **5 punti.** È assegnato nel piano un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $O, \vec{x}, \vec{y}, u$. Studiare il fascio di coniche di equazione:

$$x^2 + 2hxy + hy^2 + 2x + 2y + 1 = 0,$$

determinandone, in particolare, punti base e coniche spezzate. Determinare gli asintoti dell'iperbole equilatera del fascio.

3. **5 punti.** È assegnato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}, u$. Determinare e studiare le quadriche contenenti la conica:

$$\Gamma\colon \begin{cases} x^2 - y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

e i punti $P_1 = (0,1,1)$, $P_2 = (1,0,1)$ e $P_3 = (0,1,-1)$.

Soluzione

1. È facile vedere che la retta r ha parametri direttori $(-1,1,2)$. Quindi, se (l,m,n) sono parametri direttori di s deve accadere che:

$$\begin{cases} -l + m + 2n = 0 \\ l + n = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m = 3l \\ n = -l. \end{cases}$$

Quindi, possiamo dire che $(1,3,-1)$ sono parametri direttori di s e:

$$s\colon x = \frac{y-1}{3} = -(z-1) \Rightarrow s\colon \begin{cases} x + z - 1 = 0 \\ 3x - y + 1 = 0. \end{cases}$$

Per trovare il punto P', dobbiamo determinare la retta t passante per P e ortogonale a π e il punto $H = t \cap \pi$. Il punto P' è il simmetrico di P rispetto a H. Si vede cfailmente che:

$$t\colon \begin{cases} x = t \\ y = 1 \\ z = 1 + t \end{cases} \Rightarrow H = t \cap \pi\colon \begin{cases} x = t \\ y = 1 \\ z = 1 + t \\ x + z = 0 \end{cases} \Rightarrow H = (-\tfrac{1}{2}, 1, \tfrac{1}{2}).$$

Quindi, dovendo essere P' il simmetrico di P rispetto a H, cioè dovendo essere H il punto medio di P e P', si vede facilmente che $P' = (-1,1,0)$.

2. La conica nascosta del fascio ha equazione $y(2x+y)=0$, per cui è una conica spezzata. Da:

$$|B| = \begin{vmatrix} 1 & h & 1 \\ h & h & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -(h-1)^2$$

vediamo che per $h \neq 1$ abbiamo coniche irriducibili, mentre per $h=1$ abbiamo una conica spezzata che ha equazione $(x+y+1)^2=0$. Per quanto riguarda i punti base, essi sono dati da:

$$\begin{cases} y(2x+y)=0 \\ (x+y+1)^2=0, \end{cases}$$

per cui abbiamo i punti $(-1,0)$ e $(1,-2)$, entrambi contati due volte. Inoltre:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & h \\ h & h \end{vmatrix} = h-h^2,$$

per ui per $0<h<1$ abbiamo delle ellissi reali (in quanto i punti base sono reali); non figurano circonferenze nel fascio; per $h=0$ abbiamo una parabola, mentre per $h=1$ è spezzata; per $h<0$ e $h>1$ abbiamo delle iperboli, tra le quali figura una equilatera per $h=-1$.

L'iperbole equilatera ha equazione:

$$x^2-2xy-y^2+2x+2y+1=0.$$

Il suo centro di simmetria è dato dal sistema associato alle prime due righe della matrice B:

$$\begin{cases} x-y+1=0 \\ -x-y+1=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=1. \end{cases}$$

Quindi, il centro di simmetria è il punto $C=(0,1)$. Per trovare gli asintoti, dobbiamo determinare i punti impropri dell'iperbole:

$$\begin{cases} x^2-2xy-y^2+2xt+2yt+t^2=0 \\ t=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2-2xy-y^2=0 \\ t=0. \end{cases}$$

Troviamo i punti impropri $P_1^\infty=(1+\sqrt{2},1,0)$ e $P_2^\infty=(1-\sqrt{2},1,0)$. Gli asintoti sono le rette CP_1^∞ e CP_2^∞, per cui hanno equazioni $x-(1+\sqrt{2})y+1+\sqrt{2}=0$ e $x-(1-\sqrt{2})y+1-\sqrt{2}=0$.

3. Le quadriche contenenti la conica data hanno equazione:

$$x^2-y+z(ax+by+cz+d)=0.$$

Imponendo il passaggio per i punti dati, abbiamo:

$$\begin{cases} b+c+d=1 \\ a+c+d=-1 \\ -b+c-d=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b=-d \\ a=-d-2 \\ c=1. \end{cases}$$

Quindi, le quadriche cercate hanno equazione:

$$x^2+(-d-2)xz-dyz+z^2-y+dz=0.$$

Dunque:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{-d-2}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{d}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{-d-2}{2} & -\frac{d}{2} & 1 & \frac{d}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{d}{2} & 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{-d-2}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{d}{2} \\ \frac{-d-2}{2} & -\frac{d}{2} & 1 \end{pmatrix}.$$

Vediamo che $|B| = \frac{5d^2+4d}{16}$ e $|A| = -\frac{d^2}{4}$. Quindi, per $d=0$ abbiamo $|B|=|A|=0$ e $\rho(B)=3$, per cui abbiamo un cilindro. Per $d=-\frac{4}{5}$ abbiamo $|B|=0$ e $|A|\neq 0$, per cui abbiamo un cono. Per $d\neq 0,-\frac{4}{5}$ abbiamo ellissoidi o iperboloidi, ma la conica Γ è una parabola. Quindi, non ci possono essere ellissoidi tra le quadriche. Questo vuol dire che per $d<-\frac{4}{5}$ e $d>0$ abbiamo degli ieprboloidi iperbolici, mentre per $-\frac{4}{5}<d<0$ abbiamo degli iperboloidi ellittici.