Corso di Laurea in Ingegneria Elettronica

Prova di **Algebra lineare e Geometria** - Appello 23 Aprile 2024

Durata della prova: 3 ore.
È vietato uscire dall'aula prima di aver consegnato definitivamente il compito.
È vietato consultare libri o appunti.

I

Sia $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'endomorfismo definito, al variare di $h \in \mathbb{R}$, dalle assegnazioni:

$$\begin{aligned} f(1,1,1) &= (h+2, h+2, h+2) \\ f(1,1,0) &= (h+1, h+1, h) \\ f(0,1,1) &= (2, h+1, h+1). \end{aligned}$$

1. **5 punti.** Studiare f al variare di $h \in \mathbb{R}$, determinando in ciascun caso $\operatorname{Im} f$ e $\operatorname{Ker} f$ e le loro equazioni cartesiane.
2. **5 punti.** Diagonalizzare, se possibile, la matrice $M(f)$ nei casi $h = -1$ e $h = 2$.
3. **5 punti.** Calcolare $f^{-1}(-h-1, -h-1, -h)$ al variare di $h \in \mathbb{R}$.
4. **ESERCIZIO BONUS: 5 PUNTI.** Determinare l'endomorfismo $\varphi\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ tale che:

$$\begin{aligned} &V_1 = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid x+y-t=0,\ z=0\} \\ &\varphi(0,0,1,0) = (h,-h,2,0) \\ &\varphi(0,0,0,1) = (0,0,h,2), \end{aligned}$$

al variare di $h \in \mathbb{R}$. Determinare il valore di $h \in \mathbb{R}$ per il quale φ è semplice, determinando in tal caso una base di autovettori per φ.

Soluzione

1. È facile vedere che:

$$M(f) = \begin{pmatrix} h & 1 & 1 \\ 1 & h & 1 \\ 1 & h-1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Dal momento che $|M(f)| = h^2 + h - 2$, concludiamo che per $h \neq 1, -2$ abbiamo un isomorfismo, cioè f è iniettiva e suriettiva, per cui $\operatorname{Ker} f = \{(0,0,0)\}$ e $\operatorname{Im} f = \mathbb{R}^3$.

Sia $h = 1$. In tal caso:

$$M(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{riducendo}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Quindi, si ha $\dim \operatorname{Im} f = \rho(M(f)) = 2$ e una sua base è data da $[(1,1,1),(1,1,0)]$. Inoltre, da:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ x & y & z \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -x+y=0$$

vediamo che $\operatorname{Im} f = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid -x+y=0\}$. Abbiamo, poi, che $\dim \operatorname{Ker} f = 3-2 = 1$ e:

$$\operatorname{Ker} f = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x+y+z=0,\ x+2z=0\} = \mathscr{L}((-2,1,1)).$$

Sia $h = -2$. In tal casso:

$$M(f) = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{riducendo}} \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 3 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Quindi, si ha $\dim \operatorname{Im} f = \rho(M(f)) = 2$ e una sua base è data da $[(-2,1,1),(1,1,2)]$. Inoltre, da:

$$\begin{vmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ x & y & z \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow x + 5y - 3z = 0$$

vediamo che $\operatorname{Im} f = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + 5y - 3z = 0\}$. Abbiamo, poi, che $\dim \operatorname{Ker} f = 3 - 2 = 1$ e:

$$\operatorname{Ker} f = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid -2x + y + z = 0,\ x - y = 0\} = \mathscr{L}((1,1,1)).$$

2. Sia $h = -1$. In tal caso:

$$P(T) = \begin{vmatrix} -1-T & 1 & 1 \\ 1 & -1-T & 1 \\ 1 & -2 & 2-T \end{vmatrix} = (1-T)^2(-2-T),$$

per cui gli autovalori sono 1 e 2, con $m_1 = 2$ e $m_{-2} = 1$. Questo vuol dire che in questo caso f è semplice se e solo se $\dim V_1 = m_1 = 2$.

Sia, dunque, $T = 1$. Sappiamo che $V_1 = \operatorname{Ker} f_1$, dove $f_1 = f - i$ e:

$$M(f_1) = M(f) - I = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{riducendo}} \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 3 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Questo vuol dire che $\dim V_1 = 3 - \rho(M(f_1)) = 3 - 2 = 1 < 2 = m_1$. Quindi, per $h = 1$ f non è semplice, per cui $M(f)$ non è diagonalizzabile.

Sia $h = 2$. In tal caso:

$$P(T) = \begin{vmatrix} 2-T & 1 & 1 \\ 1 & 2-T & 1 \\ 1 & 1 & 2-T \end{vmatrix} = (1-T)^2(4-T).$$

Quindi, gli autovalori sono 1 e 4, con $m_1 = 2$ e $m_4 = 1$, per cui f è semplice se e solo se $\dim V_1 = m_1 = 2$.

Sia $T = 1$. Sappiamo che $V_1 = \operatorname{Ker} f_1$, dove $f_1 = f - i$ e:

$$M(f_1) = M(f) - I = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

In questo caso, quindi, $\dim V_1 = 3 - \rho(M(f_1)) = 3 - 1 = 2 = m_1$. Questo vuol dire che per $h = 2$ f è semplice e possiamo diagonalizzare f. Dalla matrice precedente abbiamo:

$$V_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 0\} = \mathscr{L}((1,0,-1),(0,1,-1)).$$

Sia $T = 4$. Sappiamo che $V_4 = \operatorname{Ker} f_4$, dove $f_4 = f - 4i$ e:

$$M(f_4) = M(f) - 4I = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{riducendo}} \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 3 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dunque:

$$V_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid -2x + y + z = 0,\ x - y = 0\} = \mathscr{L}((1,1,1)).$$

Quindi, per $h = 2$ una base di autovettori è data da $[(1,0,-1),(0,1,-1),(1,1,1)]$ e abbiamo che $P^{-1}M(f)P = D$, dove:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

3. Sappiamo dal testo che $f(1,1,0) = (h+1, h+1, h)$, per cui:
$$f(-1,-1,0) = (-h-1, -h-1, -h).$$
Dal momento che per $h \neq 1, -2$ f è un isomorfismo, possiamo subito concludere che per $h \neq 1, -2$ abbiamo:
$$f^{-1}(-h-1, -h-1, -h) = \{(-1,-1,0)\}.$$
Sia $h = 1$. In questo caso, dobbiamo risolvere il sistema la cui matrice completa associata è:
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 2 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{riducendo}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & -1 \end{array}\right),$$
da cui abbiamo:
$$\begin{cases} x+y+z = -2 \\ x+2z = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -2z-1 \\ y = z-1. \end{cases}$$
Quindi, per $h = 1$ abbiamo:
$$f^{-1}(-h-1, -h-1, -h) = f^{-1}(-2,-2,-1) = \{(-2z-1, z-z, z) \in \mathbb{R}^3\}.$$
Sia $h = -2$. In questo caso, dobbiamo risolvere il sistema la cui matrice completa associata è:
$$\left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 2 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{riducendo}} \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right),$$
da cui abbiamo:
$$\begin{cases} -2x+y+z = 1 \\ x-y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = y \\ z = y+1. \end{cases}$$
Quindi, per $h = 1$ abbiamo:
$$f^{-1}(-h-1, -h-1, -h) = f^{-1}(1,1,2) = \{(y, y, y+1) \in \mathbb{R}^3\}.$$

4. Dato che:
$$V_1 = \mathscr{L}((-1,1,0,0), (1,0,0,1)),$$
possiamo dire che $\varphi(-1,1,0,0) = (-1,1,0,0)$ e $\varphi(1,0,0,1) = (1,0,0,1)$. Si può successivamente osservare che $\mathscr{A} = [(-1,1,0,0), (1,0,0,1), (0,0,1,0), (0,0,0,1)]$ è una base di $\mathbb{R}^4$ e che:
$$M^{\mathscr{A}}(\varphi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -h & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & h \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$
Dunque, si vede facilmente che $P(T) = (1-T)^2(2-T)^2$, per cui φ è semplice se e solo se $\dim V_1 = m_1 = 2$ e $\dim V_2 = m_2 = 2$.

Sia $T = 1$. Sappiamo che $V_1 = \operatorname{Ker} \varphi_1$, dove $\varphi_1 = \varphi - i$ e:
$$M^{\mathscr{A}}(\varphi_1) = M^{\mathscr{A}}(\varphi) - I = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -h & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & h \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$
Ovviamente, si ha $\rho(M^{\mathscr{A}}(\varphi_1)) = 2$ per ogni $h \in \mathbb{R}$ e $\dim V_1 = 2$ per ogni $h \in \mathbb{R}$.

Sia $T = 2$. Sappiamo che $V_2 = \operatorname{Ker} \varphi_2$, dove $\varphi_2 = \varphi - 2i$ e:
$$M^{\mathscr{A}}(\varphi_2) = M^{\mathscr{A}}(\varphi) - 2I = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -h & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & h \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$
Ovviamente, si ha $\rho(M^{\mathscr{A}}(\varphi_1)) = 3$ per ogni $h \neq 0$ e che $\rho(M^{\mathscr{A}}(\varphi)) = 2$ per $h = 0$. Questo vuol dire che solo per $h = 0$ abbiamo $\dim V_2 = 2$ e che questo è l'unico valore di h per cui φ è semplice. Per quanto riguarda la base di autovettori, possiamo notare come per $h = 0$ la matrice $M^{\mathscr{A}}(\varphi)$ sia diagonale, per cui $\mathscr{A}$ è in questo caso una base di autovettori per φ.

1. **5 punti.** È assegnato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}, u$. Sono date le rette:
$$r\colon \begin{cases} x - z = 0 \\ y - 1 = 0 \end{cases} \quad \text{e} \quad s\colon \begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \end{cases}.$$
Determinare il piano π passante per $P = (1, 2, -1)$ e parallelo alle rette r e s e determinare la retta t incidente r e s e passante per P.

2. **5 punti.** È assegnato nel piano un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $O, \vec{x}, \vec{y}, u$. Studiare il fascio di coniche di equazione:
$$x^2 - 2hxy + y^2 + x + y = 0,$$
determinandone, in particolare, punti base e coniche spezzate. Determinare il vertice della parabola del fascio.

3. **5 punti.** È assegnato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}, u$. Determinare e studiare le quadriche contenenti la conica:
$$\Gamma\colon \begin{cases} x = y^2 \\ z = 0 \end{cases}$$
e passante per $A = (0, 0, -1)$, $B = (1, 1, 1)$ e $C = (0, 0, 1)$.

Soluzione

1. Le rette r e s hanno parametri direttori, rispettivamente, $(1, 0, 1)$ e $(1, 0, 0)$. Quindi, se (a, b, c) sono le componenti di un vettore ortogonale al piano π, si ha:
$$\begin{cases} a + c = 0 \\ a = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ c = 0. \end{cases}$$
Quindi, possiamo dire che $(0, 1, 0)$ sono le componenti di un vettore ortogonale a π, che ha equazione $y - 2 = 0$.

   Per determinare la retta t dobbiamo trovare i piani α e β passanti per P e contenenti, rispettivamente, le rette r e s.

   I piani contenenti r hanno equazione $\lambda(x - z) + \mu(y - 1) = 0$. Imponendo il passaggio per P troviamo $2\lambda + \mu = 0$, per cui $\alpha\colon\ x - 2y - z + 2 = 0$.

   I piani contenenti s hanno equazione $\lambda y + \mu z = 0$. Imponendo il passaggio per P troviamo $2\lambda - \mu = 0$, per cui $\beta\colon\ y + 2z = 0$. Dunque:
$$t = \alpha \cap \beta\colon \begin{cases} x - 2y - z + 2 = 0 \\ y + 2z = 0. \end{cases}$$

2. Osserviamo che la conica nascosta ha equazione $xy = 0$, per cui è spezzata. Da:
$$B = \begin{pmatrix} 1 & -h & \frac{1}{2} \\ -h & 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$
vediamo che $|B| = -\frac{h+1}{2}$, per cui per $h = -1$ abbiamo una conica spezzata di equazione $(x + y)(x + y + 1) = 0$ e per $h \neq -1$ abbiamo coniche irriducibili.

   Da:
$$\begin{cases} xy = 0 \\ (x + y)(x + y + 1) = 0 \end{cases}$$
vediamo che i punti base del fascio sono $(0, 0)$, contato due volte, $(-1, 0)$ e $(0, -1)$. Inoltre, da:
$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -h \\ -h & 1 \end{vmatrix} = 1 - h^2$$

abbiamo che per $-1 < h < 1$ abbiamo delle ellissi, tutte reali in quanto i punti base sono reali; per $h = 0$ abbiamo una circonferenza; per $h = -1$ abbiamo una concia spezzata, mentre per $h = 1$ abbiamo una parabola; per $h < -1$ e $h > 1$ abbiamo delle iperboli, nessuna delle quali è equilatera.

Cerchiamo, ora, il vertice della parabola, che ha equazione $x^2 - 2xy + y^2 + x + y = 0$. Da:

$$\begin{cases} x^2 - 2xy + y^2 + xt + yt = 0 \\ t = 0 \end{cases}$$

troviamo che $P_\infty = (1,1,0)$ è il punto improprio della parabola. Questo vuol dire che le rette ortogonali all'asse di simmetria hanno equazione $x + y + k = 0$. Tra tutte queste rette cerchiamo quella tangente alla parabola (lo sarà nel vertice):

$$\begin{cases} x^2 - 2xy + y^2 + x + y = 0 \\ x + y + k = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = -x - k \\ 4x^2 + 4kx^2 + k^2 - k = 0. \end{cases}$$

Dato che $\frac{\Delta}{4} = 4k$, vediamo che la retta è tangente per $k = 0$ e dal sistema precedente per $k = 0$ troviamo che il vertice è il punto $(0,0)$.

3. Le quadriche contenenti la conica data hanno equazione:

$$x - y^2 + z(ax + by + cz + d) = 0.$$

Imponendo il passaggio per i punti dati troviamo:

$$\begin{cases} c - d = 0 \\ a + b + c + d = 0 \\ c + d = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c = 0 \\ d = 0 \\ b = -a. \end{cases}$$

Quindi, le quadriche cercate hanno equazione:

$$axz - ayz - y^2 + x = 0.$$

Da:

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{a}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & -1 & -\frac{a}{2} & 0 \\ \frac{a}{2} & -\frac{a}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{a}{2} \\ 0 & -1 & -\frac{a}{2} \\ \frac{a}{2} & -\frac{a}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

vediamo che $|B| = \frac{a^2}{16}$ e $|A| = -\frac{a^2}{4}$. Per $a = 0$ abbiamo $|B| = 0$, $|A| = 0$ e si vede che $\rho(B) = 3$, per cui in questo caso abbiamo un cilindro. Per $a \neq 0$ abbiamo $|B| > 0$ e $|A| \neq 0$. Essendo le quadriche reali per costruzioni, possiamo subito concludere che per $a \neq 0$ abbiamo degli iperboloidi iperbolici.