

# Corso di Laurea in Ingegneria Industriale (F-O)

Prova di **Algebra lineare e Geometria** - Appello 23 Febbraio 2024

Durata della prova: 3 ore.

È vietato uscire dall'aula prima di aver consegnato definitivamente il compito.

È vietato consultare libri o appunti.

## I

Sia  $f: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$  l'endomorfismo definito dall'assegnazione:

$$f(x, y, z, t) = ((h+3)x + (2h-1)y + z + t, 2y + z + t, y + 2z + t, hy + hz + (h+1)t) \quad \forall (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4,$$

al variare di  $h \in \mathbb{R}$ .

- 5 punti.** Studiare  $f$ , determinando in ciascun caso  $\text{Im } f$  e  $\text{Ker } f$  e le loro equazioni cartesiane.
- 5 punti.** Diagonalizzare, se possibile, la matrice  $M(f)$  nei casi  $h = -1$  e  $h = 0$ .
- 5 punti.** È dato il sottospazio  $V = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + z = 0, y + t = 0\}$ . Calcolare, al variare di  $h \in \mathbb{R}$ ,  $f(V)$  e la somma  $V + f(V)$ , specificandone in ciascun caso la dimensione e determinando, in particolare, le equazioni cartesiane di  $V + f(V)$ .

## Soluzione

- È facile vedere che:

$$M(f) = \begin{pmatrix} h+3 & 2h-1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & h & h & h+1 \end{pmatrix}.$$

Dal momento che  $|M(f)| = (h+3)^2$ , per  $h \neq -3$  abbiamo un isomorfismo, cioè  $f$  è iniettiva e suriettiva, per cui  $\text{Ker } f = \{(0, 0, 0, 0)\}$  e  $\text{Im } f = \mathbb{R}^4$ .

Sia  $h = -3$ . In questo caso:

$$M(f) = \begin{pmatrix} 0 & -7 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & -3 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{riducendo}} \begin{pmatrix} 0 & -7 & 1 & 1 \\ 0 & 9 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Quindi,  $\dim \text{Im } f = \rho(M(f)) = 3$  e una sua base è data da  $\{(-7, 2, 1, -3), (1, 1, 2, -3), (1, 1, 1, -2)\}$ . Da:

$$\begin{pmatrix} -7 & 2 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & 2 & -3 \\ 1 & 1 & 1 & -2 \\ x & y & z & t \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{riducendo}} \begin{pmatrix} -7 & 2 & 1 & -3 \\ 15 & -3 & 0 & 3 \\ 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & y+z+t \end{pmatrix}$$

vediamo che:

$$\text{Im } f = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid y + z + t = 0\}.$$

Inoltre,  $\dim \text{Ker } f = 4 - \dim \text{Im } f = 1$  e si ha:

$$\text{Ker } f = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid -7y + z + t = 0, y = 0, z = 0\} = \mathcal{L}((1, 0, 0, 0)).$$

2. Sia  $h = -1$ . In questo caso abbiamo:

$$P(T) = \begin{vmatrix} 2-T & -3 & 1 & 1 \\ 0 & 2-T & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2-T & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -T \end{vmatrix} = (2-T)^2(1-T)^2.$$

Quindi, gli autovalori sono 1 e 2, con  $m_1 = 2$  e  $m_2 = 2$ . Sappiamo che  $f$  è semplice e che, dunque,  $M(f)$  è diagonalizzabile se e solo se si ha contemporaneamente  $\dim V_1 = m_1 = 2$  e  $\dim V_2 = m_2 = 2$ .

Sia  $T = 1$ . Abbiamo  $V_1 = \text{Ker } f_1$ , dove  $f_1 = f - i$  e:

$$M(f_1) = M(f) - I = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{riducendo}} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Quindi, si ha  $\rho(M(f_1)) = 2$ , per cui  $\dim V_1 = 4 - 2 = 2 = m_1$ . Affinché  $f$  sia semplice, rimane da stabilire se  $\dim V_2 = m_2 = 2$ .

Sia  $T = 2$ . Abbiamo  $V_2 = \text{Ker } f_2$ , dove  $f_2 = f - 2i$  e:

$$M(f_2) = M(f) - 2I = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{riducendo}} \begin{pmatrix} 0 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Quindi, si ha  $\rho(M(f_2)) = 3$  e  $\dim V_2 = 4 - 3 = 1 < 2 = m_2$ , per cui per  $h = -1$   $f$  non è semplice e la matrice  $M(f)$  non è diagonalizzabile.

Sia  $h = 0$ . In questo caso:

$$P(T) = \begin{vmatrix} 3-T & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2-T & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2-T & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1-T \end{vmatrix} = (3-T)^2(1-T)^2.$$

Quindi, gli autovalori sono 1 e 3, con  $m_1 = 2$  e  $m_3 = 2$ . Questo vuol dire che in questo caso  $f$  è semplice e, perciò, che  $M(f)$  è diagonalizzabile se e solo se si ha contemporaneamente  $\dim V_1 = m_1 = 2$  e  $\dim V_3 = m_3 = 2$ .

Sia  $T = 1$ . Abbiamo che  $V_1 = \text{Ker } f_1$ , dove  $f_1 = f - i$  e:

$$M(f_1) = M(f) - I = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{riducendo}} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

per cui  $\rho(M(f_1)) = 2$  e  $\dim V_1 = 4 - 2 = 2 = m_1$ . Questo vuol dire che, se dovesse essere  $\dim V_3 = m_3 = 2$ ,  $f$  sarà semplice e sarà possibile diagonalizzare  $M(f)$ .

Sia  $T = 3$ . In questo caso, abbiamo  $V_3 = \text{Ker } f_3$ , dove  $f_3 = f - 3i$  e:

$$M(f_3) = M(f) - 3I = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{riducendo}} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Quindi,  $\rho(M(f_3)) = 2$  e si ha  $\dim V_3 = 4 - 2 = 2 = m_3$ , per cui per  $h = 0$   $f$  è semplice e la matrice  $M(f)$  risulta diagonalizzabile. Dalle matrici precedenti otteniamo subito che:

$$V_1 = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid 2x - y + z + t = 0, y + z + t = 0\} = \{(y, y, z, -y - z) \in \mathbb{R}^4\} = \mathcal{L}((1, 1, 0, -1), (0, 0, 1, -1))$$

e che:

$$V_3 = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid -y + z + t = 0, t = 0\} = \{(x, y, y, 0) \in \mathbb{R}^4\} = \mathcal{L}((1, 0, 0, 0), (0, 1, 1, 0)).$$

Quindi, una base di autovettori è  $[(1, 1, 0, -1), (0, 0, 1, -1), (1, 0, 0, 0), (0, 1, 1, 0)]$  e possiamo dire che  $P^{-1}M(f)P = D$ , dove:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

3. Dal momento che  $V = \mathcal{L}((1, 0, -1, 0), (0, 1, 0, -1))$ , possiamo dire che:

$$f(V) = \mathcal{L}(f(1, 0, -1, 0), f(0, 1, 0, -1)) = \mathcal{L}((h+2, -1, -2, -h), (2h-2, 1, 0, -1)).$$

Dato che la matrice:

$$\begin{pmatrix} h+2 & -1 & -2 & -h \\ 2h-2 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

ha rango 2 per ogni  $h \in \mathbb{R}$ , possiamo dire che  $\dim f(V) = 2$  per ogni  $h \in \mathbb{R}$ . Inoltre:

$$V + f(V) = \mathcal{L}((1, 0, -1, 0), (0, 1, 0, -1), (h+2, -1, -2, -h), (2h-2, 1, 0, -1)).$$

Da:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ h+2 & -1 & -2 & -h \\ 2h-2 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{riducendo, per } h \neq -1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ h & 0 & 0 & -h-1 \\ 2h-2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

vediamo che per  $h \neq 1, -1$  si ha  $\dim(V + f(V)) = 4$  e, essendo  $V + f(V) \subseteq \mathbb{R}^4$ , concludiamo che in tal caso  $V + f(V) = \mathbb{R}^4$ .

Sia  $h = 1$ . La riduzione precedente ci porta alla conclusione che  $\dim(V + f(V)) = 3$ . Dal momento che le prime tre righe della matrice ridotta ci forniscono una base di  $V + f(V)$ , otteniamo la sua equazione cartesiana da:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -2 \\ x & y & z & t \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{riducendo}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 2x + y + 2z + t \end{pmatrix}$$

$$V + f(V) = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid 2x + y + 2z + t = 0\}.$$

Sia  $h = -1$ . In questo caso, da:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & -2 & 1 \\ -4 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{riducendo}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

vediamo che anche in questo caso abbiamo  $\dim(V + f(V)) = 3$  e ricaviamo la sua equazione cartesiana da:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ x & y & z & t \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow y + t = 0,$$

per cui  $V + f(V) = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid y + t = 0\}$ .

1. **5 punti.** È assegnato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale  $O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}, u$ . Sono dati i piani:

$$\pi_1: x + y - z + 1 = 0 \quad \text{e} \quad \pi_2: 2x - y + 4z + 1 = 0$$

e il punto  $P = (-1, -1, -1)$ . Determinare il piano  $\pi$  ortogonale a  $\pi_1$  e  $\pi_2$  e passante per  $P$ . Data  $r = \pi_1 \cap \pi_2$ , calcolare  $d(P, r)$ .

2. **5 punti.** È assegnato nel piano un sistema di riferimento cartesiano ortogonale  $O, \vec{x}, \vec{y}, u$ . Studiare il fascio di coniche di equazione:

$$x^2 - 2hxy - y^2 + 2y - 1 = 0,$$

determinandone, in particolare, punti base e coniche spezzate. Determinare gli asintoti della conica del fascio tangente alla retta di equazione  $x + y = 0$ .

3. **5 punti.** È assegnato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale  $O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}, u$ . Determinare il cono e il cilindro aventi vertici, rispettivamente,  $V = (0, 1, 1)$  e  $V' = (1, -1, 1, 0)$  e contenenti la conica:

$$\Gamma: \begin{cases} x^2 - y^2 - 1 = 0 \\ z = 0. \end{cases}$$

Stabilire la natura del cilindro.

4. **ESERCIZIO BONUS: 5 PUNTI.** È assegnato nel piano un sistema di riferimento cartesiano ortogonale  $O, \vec{x}, \vec{y}, u$ . Determinare il vertice e l'asse di simmetria della parabola di equazione:

$$x^2 - 2xy + y^2 - x = 0.$$

*Soluzione*

1. Un vettore di componenti  $(a, b, c)$  ortogonale al piano  $\pi$  è tale che:

$$\begin{cases} a + b - c = 0 \\ 2a - b + 4c = 0, \end{cases}$$

da cui segue che  $(1, -2, -1)$  sono componenti di un vettore ortogonale al piano  $\pi$  e si ha:

$$\pi: x - 2y - z - 2 = 0.$$

Inoltre, dato che  $r = \pi_1 \cap \pi_2$  e che  $\pi$  è ortogonale ai due piani, allora  $r$  e  $\pi$  sono ortogonali. Inoltre, poiché  $P \in \pi$ , se  $H = r \cap \pi$ , si ha che  $d(P, r) = \overline{PH}$ . Da:

$$H = \pi \cap r: \begin{cases} x - 2y - z - 2 = 0 \\ x + y - z + 1 = 0 \\ 2x - y + 4z + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -\frac{1}{3} \\ y = -1 \\ z = -\frac{1}{3} \end{cases}$$

segue che  $H = (-\frac{1}{3}, -1, -\frac{1}{3})$  e che  $d(P, r) = \overline{PH} = \frac{2}{3}\sqrt{2}$ .

2. Osserviamo che la conica nascosta ha equazione  $xy = 0$ , per cui è una conica spezzata. Inoltre, da:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -h & 0 \\ -h & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

vediamo che  $|B| = h^2$ , per cui l'altra conica spezzata del fascio si ottiene per  $h = 0$  ed ha equazione:

$$x^2 - y^2 + 2y - 1 = 0 \Rightarrow (x + y - 1)(x - y + 1) = 0.$$

Inoltre, per  $h \neq 0$  abbiamo coniche irriducibili. I punti base del fascio sono dati da:

$$\begin{cases} xy = 0 \\ (x+y-1)(x-y+1) = 0, \end{cases}$$

per cui abbiamo il punto  $(0, 1)$  contato due volte e i punti  $(1, 0)$  e  $(-1, 0)$ . Infine, dato che:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -h \\ -h & -1 \end{vmatrix} = -1 - h^2 < 0 \quad \forall h \in \mathbb{R},$$

abbiamo che per  $h \neq 0$  le coniche sono tutte delle iperboli ed esse sono anche tutte equilatera, poiché  $\text{Tr}(A) = 0$  per ogni  $h \in \mathbb{R}$ .

Cerchiamo la conica del fascio tangente alla retta  $x + y = 0$ :

$$\begin{cases} x^2 - 2hxy - y^2 + 2y - 1 = 0 \\ x + y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2hx^2 - 2x - 1 = 0 \\ y = -x. \end{cases}$$

Affinché la retta sia tangente dobbiamo avere due soluzioni coincidenti ed è facile vedere che questo avviene solo se  $h = -\frac{1}{2}$ . Quindi, la conica cercata ha equazione:

$$x^2 + xy - y^2 + 2y - 1 = 0.$$

Da:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

otteniamo il sistema:

$$\begin{cases} x + \frac{1}{2}y = 0 \\ \frac{1}{2}x - y + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -\frac{2}{5} \\ y = \frac{4}{5}. \end{cases}$$

Quindi,  $C = (-\frac{2}{5}, \frac{4}{5})$  è il centro di simmetria dell'iperbole data. Per determinarne gli asintoti occorre calcolarne i punti impropri:

$$\begin{cases} x^2 + xy - y^2 + 2yt - t^2 = 0 \\ t = 0 \end{cases} \Rightarrow P_1^\infty = (-1 + \sqrt{5}, 2, 0) \quad \text{e} \quad P_2^\infty = (-1 - \sqrt{5}, 2, 0).$$

Gli asintoti sono le rette:

$$CP_1^\infty: 10x - (5\sqrt{5} - 5)y + 4\sqrt{5} = 0$$

e

$$CP_2^\infty: 10x + (5\sqrt{5} + 5)y - 4\sqrt{5} = 0.$$

3. Il generico punto della conica  $\Gamma$  è  $P = (\alpha, \beta, 0)$ , dove  $\alpha^2 - \beta^2 - 1 = 0$ . Il cono cercato è il luogo delle rette:

$$PV: \frac{x}{\alpha} = \frac{y-1}{\beta-1} = 1-z \Rightarrow \begin{cases} \frac{x}{\alpha} = 1-z \\ \frac{y-1}{\beta-1} = 1-z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = \frac{x}{1-z} \\ \beta = \frac{y-z}{1-z}. \end{cases}$$

Quindi, sostituendo in  $\alpha^2 - \beta^2 - 1 = 0$  otteniamo:

$$\frac{x^2}{(1-z)^2} - \frac{(y-z)^2}{(1-z)^2} - 1 = 0 \Rightarrow x^2 - (y-z)^2 - (1-z)^2 = 0 \Rightarrow x^2 - y^2 + 2yz - 2z^2 + 2z - 1 = 0,$$

che è l'equazione del cono.

Il cilindro (che sarà iperbolico, dato che  $\Gamma$  è un'iperbole) è il luogo delle rette  $PV'$ :

$$PV': x - \alpha = -y + \beta = z \Rightarrow \begin{cases} \alpha = x - z \\ \beta = y + z. \end{cases}$$

Sostituendo come fatto in precedenza otteniamo l'equazione del cilindro:

$$(x-z)^2 - (y+z)^2 - 1 = 0 \Rightarrow x^2 - y^2 - 2xz - 2yz - 1 = 0.$$

4. Il punto improprio della parabola è dato dal sistema:

$$\begin{cases} x^2 - 2xy + y^2 - xt = 0 \\ t = 0, \end{cases}$$

per cui esso è  $P_\infty = (1, 1, 0)$ . Questo vuol dire che le rette ortogonali all'asse di simmetria hanno equazione  $x + y + k = 0$ . Tra tutte queste rette cerchiamo quella tangente alla parabola e lo sarà nel suo vertice:

$$\begin{cases} x^2 - 2xy + y^2 - x = 0 \\ y = -x - k \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4x^2 + (4k - 1)x + k^2 = 0 \\ y = -x - k. \end{cases}$$

Affinché la retta sia tangente deve accadere che:

$$\Delta = 0 \Leftrightarrow -8k + 1 = 0 \Leftrightarrow k = \frac{1}{8}.$$

Quindi, il vertice si ottiene risolvendo il sistema:

$$\begin{cases} 4x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{64} = 0 \\ y = -x - \frac{1}{8} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{16} \\ y = -\frac{3}{16}. \end{cases}$$

Quindi, il vertice della parabola è il punto  $V = (\frac{1}{16}, -\frac{3}{16})$  e l'asse di simmetria della parabola è la retta:

$$VP_\infty: x - y - \frac{1}{4} = 0.$$