Corso di Laurea in Ingegneria Elettronica

Prova di **Algebra lineare e Geometria** - Appello 20 Febbraio 2024

Durata della prova: 3 ore.
È vietato uscire dall'aula prima di aver consegnato definitivamente il compito.
È vietato consultare libri o appunti. Compito A

I

Sia $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^4$ l'applicazione lineare definita, al variare di $h\in\mathbb{R}$, dall'assegnazione:

$$f(x,y,z)=(x+hy+z,2x+y+z,-x+y+hz,-hx+hy+z)\quad\forall(x,y,z)\in\mathbb{R}^3.$$

1. **5 punti.** Studiare f al variare di $h\in\mathbb{R}$, determinando in ciascun caso $\operatorname{Im}f$ e $\operatorname{Ker}f$.
2. **5 punti.** Diagonalizzare, se possibile, le seguenti matrici:

$$A=\begin{pmatrix}1&-1&1\\2&1&1\\-1&1&-1\end{pmatrix}\quad\text{e}\quad B=\begin{pmatrix}3&-1&1\\1&1&1\\1&-1&3\end{pmatrix}.$$

3. **5 punti.** Calcolare $f^{-1}(0,1,0,1)$ al variare di $h\in\mathbb{R}$.

Soluzione

1. È facile vedere che:

$$M(f)=\begin{pmatrix}1&h&1\\2&1&1\\-1&1&h\\-h&h&1\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{riducendo, per }h\neq1,-1}\begin{pmatrix}1&h&1\\1&1-h&0\\-2h-2&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}.$$

Quindi, per $h\neq\pm1$ vediamo che $\dim\operatorname{Im}f=\rho(M(f))=3$. In particolare, possiamo dire che una base di $\operatorname{Im}f$ è $[(1,2,-1,-h),(h,1,1,h),(1,1,h,1)]$. Inoltre, sappiamo che $\dim\operatorname{Ker}f=\dim\mathbb{R}^3-\dim\operatorname{Im}f=0$, per cui $\ker f=\{(0,0,0)\}$ e possiamo dire che f per $h\neq\pm1$ è iniettiva.

Sia $h=1$. In tal caso:

$$M(f)=\begin{pmatrix}1&1&1\\2&1&1\\-1&1&1\\-1&1&1\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{riducendo}}\begin{pmatrix}1&1&1\\1&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},$$

per cui in questo caso $\dim\operatorname{Im}f=\rho(M(f))=2$ e una base di $\operatorname{Im}f$ è data da $[(1,2,-1,-1),(1,1,1,1)]$. Inoltre, si ha $\dim\operatorname{Ker}f=3-2=1$ e:

$$\operatorname{Ker}f=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\mid x+y+z=0,\ x=0\}=\mathscr{L}((0,1,-1)).$$

Sia $h=-1$. In tal caso:

$$M(f)=\begin{pmatrix}1&-1&1\\2&1&1\\-1&1&-1\\1&-1&1\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{riducendo}}\begin{pmatrix}1&-1&1\\3&0&2\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},$$

per cui in questo caso $\dim\operatorname{Im}f=\rho(M(f))=2$ e una base di $\operatorname{Im}f$ è data da $[(1,2,-1,1),(-1,1,1,-1)]$. Inoltre, si ha $\dim\operatorname{Ker}f=3-2=1$ e:

$$\operatorname{Ker}f=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\mid x-y+z=0,\ 3x+2z=0\}=\mathscr{L}((2,-1,-3)).$$

2. Dal momento che:

$$P_A(T) = \begin{vmatrix} 1-T & -1 & 1 \\ 2 & 1-T & 1 \\ -1 & 1 & -1-T \end{vmatrix} = -T(T^2 - T + 1),$$

l'unico autovalore è 0 con $m_0 = 1$. Questo vuol dire che in questo caso la matrice A non è diagonalizzabile.

Per quanto riguarda la matrice B, abbiamo:

$$P_B(T) = \begin{vmatrix} 3-T & -1 & 1 \\ 1 & 1-T & 1 \\ 1 & -1 & 3-T \end{vmatrix} = (3-T)(T-2)^2.$$

Quindi, gli autovalori sono 2 e 3, con $m_2 = 2$ e $m_3 = 1$. Dal momento che certamente $\dim V_3 = m_3 = 1$, possiamo dire che B è diagonalizzabile solamente se $\dim V_2 = m_2 = 2$.

Sia $T = 2$. Dato che:

$$B - 2I = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix},$$

abbiamo $\rho(B-2I) = 1$, per cui $\dim V_2 = 3 - 1 = 2 = m_2$. Questo vuol dire che B è diagonalizzabile. Inoltre:

$$V_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - y + z = 0\} = \mathscr{L}((1,1,0),(0,1,1)).$$

Sia $T = 3$. In questo caso:

$$B - 3I = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{riducendo}} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

per cui:

$$V_3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid -y + z = 0,\ x - y = 0\} = \mathscr{L}((1,1,1)).$$

Questo vuol dire che una base di autovettori è $[(1,1,0),(0,1,1),(1,1,1)]$ e che $P^{-1}BP = D$, dove:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

3. Per calcolare $f^{-1}(0,1,0,1)$ occorre risolvere il sistema la cui matrice completa associata è:

$$A|B = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & h & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & h & 0 \\ -h & h & 1 & 1 \end{array}\right).$$

Si verifica facilmente che $\det(|AB) = (h^2-1)(-h-3)$, per cui per $h \neq \pm1, -3$ si ha $\rho(A|B) = 4$, mentre certamente $\rho(A) \leq 3$. Questo vuol dire che per $h \neq \pm1, -3$ il sistema è impossibile e si ha $f^{-1}(0,1,0,1) = \emptyset$.

Sia $h = 1$. In questo caso abbiamo:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{riducendo}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Quindi, anche in questo caso il sistema è impossibile e si ha $f^{-1}(0,1,0,1) = \emptyset$.

Sia $h = -1$. In questo caso abbiamo:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{riducendo}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

Quindi, anche in questo caso il sistema è impossibile e si ha $f^{-1}(0,1,0,1) = \emptyset$.

Sia $h = -3$. In questo caso:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -3 & 0 \\ 3 & -3 & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{riducendo}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 0 & 1 \\ 4 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

In questo caso, il sistema ammette 1 sola soluzione e abbiamo:

$$\begin{cases} x - 3y + z = 0 \\ x + 4y = 1 \\ 4x = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{1}{2} \\ y = \dfrac{1}{8} \\ z = -\dfrac{1}{8}. \end{cases}$$

Quindi, per $h = -3$ si ha:

$$f^{-1}(0,1,0,1) = \left\{ \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{8}, -\frac{1}{8} \right) \right\}.$$

II

1. **5 punti.** È assegnato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}, u$. Sono date le rette:
$$r\colon \begin{cases} x - y + 3z + 4 = 0 \\ x + y + 4z - 4 = 0 \end{cases} \quad \text{e} \quad s\colon \begin{cases} 3x + y + 4z = 0 \\ 2x + y + 3z = 0 \end{cases}$$
e il punto $P = (1, -1, 1)$. Determinare la retta t ortogonale alle due rette r e s e passante per P e calcolare la distanza $d(P, r)$.

2. **5 punti.** È assegnato nel piano un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $O, \vec{x}, \vec{y}, u$. Determinare e studiare il fascio di coniche passanti per i punti $A = (1,0)$ e $B = (-1,1)$ e tangenti in $C = (2,1)$ alla retta di equazione $x = 2$. Determinare una forma canonica della conica del fascio passante per $P_\infty = (1,-1,0)$.

3. **5 punti.** È assegnato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}, u$. Studiare le quadriche di equazione:
$$hx^2 + 2xy + y^2 + 2xz + 2yz + hz^2 + 2y - 1 = 0,$$
al variare di $h \in \mathbb{R}$.

4. **ESERCIZIO BONUS: 5 PUNTI.** È assegnato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}, u$. È data la conica Γ di equazioni:
$$\Gamma\colon \begin{cases} x^2 + 2xy + hz^2 + 2x - 1 = 0 \\ x + y - z = 0 \end{cases}$$
al variare di $h \in \mathbb{R}$. Determinare il valore di $h \in \mathbb{R}$ per il quale Γ è una parabola.

Soluzione

1. È immediato vedere che le rette r e s hanno parametri direttori $(-7,-1,2)$ e $(-1,-1,1)$, rispettivamente. La retta t ha parametri direttori (l, m, n) che verificano le condizioni:
$$\begin{cases} -7l - m + 2n = 0 \\ -l - m + n = 0, \end{cases}$$
per cui possiamo dire che $(1,5,6)$ sono parametri direttori della retta t e si ha:
$$t\colon x - 1 = \frac{y+1}{5} = \frac{z-1}{6} \Rightarrow t\colon \begin{cases} 6x - z - 5 = 0 \\ 6y - 5z + 11 = 0. \end{cases}$$

Per quanto riguarda la distanza $d(P,r)$, occorre trovare il piano π passante per P e ortogonale alla retta r:

$$\pi\colon 7x+y-2z-4=0.$$

Il punto $H=\pi\cap r$ è tale che $d(P,r)=\overline{PH}$. Da:

$$H=\pi\cap r\colon \begin{cases} x-y+3z+4=0 \\ x+y+4z-4=0 \\ 7x+y-2z-4=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=4 \\ z=0, \end{cases}$$

vediamo che $H=(0,4,0)$ e:

$$d(P,r)=\overline{PH}=3\sqrt{3}.$$

2. Le coniche spezzate del fascio hanno equazioni $(x-2)(x+2y-1)=0$ e $(x-y-1)(y-1)=0$. Quindi, il fascio di coniche ha equazione:

$$(x-2)(x+2y-1)+h(x-y-1)(y-1)=0 \Rightarrow x^2+(h+2)xy-hy^2-(h+3)x-4y+h+2=0.$$

Dal momento che le coniche spezzate del fascio sono solo le due usate per scriverne l'equazione, possiamo subito dire che per $h\neq 0$ le coniche sono irriducibili, mentre, ovviamente, per $h=0$ abbiamo una conica spezzata. Inoltre, da:

$$|A|=\begin{vmatrix} 1 & \dfrac{h+2}{2} \\ \dfrac{h+2}{2} & -h \end{vmatrix}=\frac{-h^2-8h-4}{4}$$

vediamo che per $h<-4-2\sqrt{3}$ e $h>-4+2\sqrt{3}$, $h\neq 0$, abbiamo delle iperboli, tra le quali figura una equilatera per $h=1$; per $h=-4\pm 2\sqrt{3}$ abbiamo due parabole; per $-4-2\sqrt{3}<h<-4+2\sqrt{3}$ abbiamo delle ellissi (tutte reali poiché sono reali i punti base), tra le quali non figurano circonferenze.

Cerchiamo, ora, la conica del fascio passante per $P_\infty=(1,-1,0)$. L'equazione del fascio in coordinate omogenee è:

$$x^2+(h+2)xy-hy^2-(h+3)xt-4yt+(h+2)t^2=0.$$

Quando imponiamo il passaggio per P_∞ otteniamo $h=-\frac{1}{2}$. Quindi, la conica che cerchiamo ha equazione:

$$2x^2+3xy+y^2-5x-8y+3=0.$$

Essendo $-\frac{1}{2}>-4+2\sqrt{3}$, la conica è un'iperbole e la sua equazione ridotta è del tipo $\alpha X^2+\beta Y^2=\gamma$. Dato che, per la conica data, si ha $|B|=-9$ e $|A|=-\frac{1}{4}$, abbiamo:

$$\gamma=-\frac{|B|}{|A|}=-36.$$

Invece, α e β sono gli autovalori di A. Essendo:

$$P_A(T)=\begin{vmatrix} 2-T & \dfrac{3}{2} \\ \dfrac{3}{2} & 1-T \end{vmatrix}=T^2-3T-\frac{1}{4},$$

vediamo che gli autovalori di A sono $\dfrac{3-\sqrt{10}}{2}$ e $\dfrac{3+\sqrt{10}}{2}$, per cui possiamo dire che un'equazione ridotta della conica è:

$$\frac{3-\sqrt{10}}{2}X^2+\frac{3+\sqrt{10}}{2}Y^2=-36$$

e una sua equazione canonica è:

$$\frac{\sqrt{10}-3}{72}X^2-\frac{\sqrt{10}+3}{72}Y^2=1.$$

3. Le matrici associate alle quadriche sono:

$$B = \begin{pmatrix} h & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & h & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad A = \begin{pmatrix} h & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & h \end{pmatrix}.$$

Abbiamo $|B| = 2h - 2h^2$ e $|A| = (h-1)^2$. Quindi, per $h = 0$ abbiamo un cono e per $h = 1$, dato che, come si verifica facilmente, $\rho(B) = 3$, abbiamo un cilindro.

Sia $h \neq 0, 1$. Abbiamo:

$$P_A(T) = \begin{vmatrix} h-T & 1 & 1 \\ 1 & 1-T & 1 \\ 1 & 1 & h-T \end{vmatrix} = -T^3 + (2h+1)T^2 + (-h^2 - 2h + 3)T + (h-1)^2.$$

Dato che $(h-1)^2 \geq 0$ per ogni $h \in \mathbb{R}$, l'unica possibilità perché si abbia un ellissoide è che sia verificato il seguente sistema:

$$\begin{cases} 2h+1 > 0 \\ -h^2 - 2h + 3 < 0 \end{cases} \Rightarrow h > 1.$$

Quindi, per $0 < h < 1$ abbiamo degli iperboloidi iperbolici; per $h < 0$ degli iperboloidi ellittici e per $h > 1$ degli ellissoidi reali.

4. Osserviamo che:

$$\Gamma\colon \begin{cases} x^2 + 2xy + hz^2 + 2x - 1 = 0 \\ x + y - z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z = x + y \\ (h+1)x^2 + (2h+2)xy + hy^2 + 2x - 1 = 0. \end{cases}$$

La quadrica di equazione $(h+1)x^2 + (2h+2)xy + hy^2 + 2x - 1 = 0$ è, come si verifica facilmente, un cilindro per ogni $h \in \mathbb{R}$. Inoltre, è anche facile verificare che il suo vertice è il punto improprio $P_\infty = (0,0,1,0)$. Dal momento che il piano $x + y - z = 0$ che contiene la conica Γ non passa per il vertice del cilindro, possiamo dire che Γ è irriducibile per ogni valore del parametro. Per determinare il valore di h per il quale Γ è una parabola, occorre determinarne i punti impropri:

$$\begin{cases} (h+1)x^2 + (2h+2)xy + hy^2 + 2xt - t^2 = 0 \\ z = x + y \\ t = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (h+1)\left(\dfrac{x}{y}\right)^2 + (2h+2)\dfrac{x}{y} + h = 0 \\ z = x + y \\ t = 0. \end{cases}$$

Il sistema precedente ha due soluzioni reali e coincidenti (e, dunque, abbiamo due punti impropri reali e coincidenti, ovvero una parabola) solamente se $\Delta = 0$, cioè:

$$(h+1)^2 - h(h+1) = 0 \Leftrightarrow h + 1 = 0 \Leftrightarrow h = -1.$$

Quindi, il valore di h per il quale Γ è una parabola è $h = -1$.