Corso di Laurea in Ingegneria Industriale (F-O) e (P-Z)

Prova di **Algebra lineare e Geometria** - Appello 7 Settembre 2023

Durata della prova: 3 ore.
È vietato uscire dall'aula prima di aver consegnato definitivamente il compito.
È vietato consultare libri o appunti.

I

Sia $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'endomorfismo definito dall'assegnazione:

$$f(x,y,z) = (x+hy+z, -hx-y+z, x-2hy-z) \quad \forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3,$$

al variare di $h \in \mathbb{R}$.

1. **5 punti.** Studiare f, determinando in ciascun caso $\operatorname{Im} f$ e $\operatorname{Ker} f$ e le loro equazioni cartesiane.
2. **5 punti.** Diagonalizzare, se possibile, le matrici:
$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 4 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 4 & -1 \end{pmatrix}.$$
3. **5 punti.** È dato l'endomorfismo f, assegnato all'inizio, nel caso $h = 0$. Stabilire se esiste l'applicazione inversa f^{-1} e, se possibile, calcolare $M(f^{-1})$.
4. **ESERCIZIO BONUS: 5 PUNTI.** Sono dati l'endomorfismo f, assegnato all'inizio, nel caso $h = 1$, lo spazio $W = \mathscr{L}((1,1,0),(0,2,1)) \subset \mathbb{R}^3$ e l'applicazione lineare $g\colon W \to \mathbb{R}^3$ tale che:
$$\begin{aligned} g(1,1,0) &= (0,0,k) \\ g(0,2,1) &= (-3k,-1,5k), \end{aligned}$$
al variare di $k \in \mathbb{R}$. Determinare il valore di $k \in \mathbb{R}$ per il quale si ha $f|_W = g$ e per tale valore di $k \in \mathbb{R}$ determinare l'equazione cartesiana di $U \subset \mathbb{R}^3$ tale che g induca endomorfismo $\varphi\colon W \to U$ per il quale si abbia $M^{\mathscr{A},\mathscr{B}}(\varphi) = I$, per qualche base $\mathscr{A}$ di W e $\mathscr{B}$ di U.

Soluzione

1. È facile vedere che:
$$M(f) = \begin{pmatrix} 1 & h & 1 \\ -h & -1 & 1 \\ 1 & -2h & -1 \end{pmatrix},$$
per cui $|M(f)| = h^2 + 3h + 2$, per cui per $h \neq -2, -1$ f è un isomorfismo. Questo vuol dire che per $h \neq -2, -1$ abbiamo che f è inettiva e suriettiva e si ha $\operatorname{Ker} f = \{(0,0,0)\}$ e $\operatorname{Im} f = \mathbb{R}^3$.

   Sia $h = -1$. In tal caso abbiamo:
$$M(f) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{riducendo}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$
   Quindi, abbiamo $\dim \operatorname{Im} f = \rho(M(f)) = 2$ e una sua base è data da $[(1,1,1),(1,1,-1)]$. Inoltre da:
$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ x & y & z \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow -2x + 2y = 0$$

ricaviamo:

$$\operatorname{Im} f = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - y = 0\}.$$

Inoltre, abbiamo $\dim \operatorname{Ker} f = 3 - \dim \operatorname{Im} f = 1$ e si ha:

$$\operatorname{Ker} f = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - y + z = 0, 2x + y = 0\} = \mathscr{L}((1, -2, -3)).$$

Sia $h = -2$. In tal caso abbiamo:

$$M(f) = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 4 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{riducendo}} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Quindi, abbiamo $\dim \operatorname{Im} f = \rho(M(f)) = 2$ e una sua base è data da $[(1, 2, 1), (1, 1, -1)]$. Inoltre da:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ x & y & z \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow -3x + 2y - z = 0$$

ricaviamo:

$$\operatorname{Im} f = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid -3x + 2y - z = 0\}.$$

Inoltre, abbiamo $\dim \operatorname{Ker} f = 3 - \dim \operatorname{Im} f = 1$ e si ha:

$$\operatorname{Ker} f = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - 2y + z = 0, x + y = 0\} = \mathscr{L}((1, -1, -3)).$$

2. Calcoliamo:

$$P_A(T) = \begin{vmatrix} 1 - T & -2 & 1 \\ 2 & -1 - T & 1 \\ 1 & 4 & -1 - T \end{vmatrix} = -T(T - 1)(T + 2).$$

Gli autovalori sono 0, 1 e -2, tutti di molteplicità algebrica 1, per cui possiamo subito concludere che la matrice A è diagonalizzabile. Per diagonalizzarla, occorre trovare i suoi autospazi.

Sia $T = 0$. Dato che $A = M(f)$ per $h = -2$, essendo f l'endomorfismo studiato nel punto precedente, possiamo subito concludere che:

$$V_0 = \operatorname{Ker} f = \mathscr{L}((1, -1, -3)).$$

Sia $T = 1$. Da:

$$A - I = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \\ 1 & 4 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{riducendo}} \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

vediamo che:

$$V_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid -2y + z = 0, 2x = 0\} = \mathscr{L}((0, 1, 2)).$$

Sia $T = -2$. Da:

$$A + 2I = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{riducendo}} \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

vediamo che:

$$V_{-2} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 3x - 2y + z = 0, -x + 3y = 0\} = \mathscr{L}((3, 1, -7)).$$

Quindi, una base di autovettori è $[(1, -1, -3), (0, 1, 2), (3, 1, -7)]$ e possiamo dire che $P^{-1}AP = D$, dove:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -1 & 1 & 1 \\ -3 & 2 & -7 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Consideriamo ora la matrice B:

$$P_B(T) = \begin{vmatrix} -1-T & -2 & 1 \\ 2 & -1-T & 1 \\ 1 & 4 & -1-T \end{vmatrix} = -(T-1)(T^2+4T+6).$$

In questo caso, l'unico autovalore è 1 con $m_1 = 1$. Ciò vuol dire che certamente la matrice B non è diagonalizzabile.

3. Sappiamo, dal punto 1, che per $h = 0$ si ha $|M(f)| = 2 \neq 0$. Questo significa che per $h = 0$ f è invertibile e si ha $M(f^{-1}) = M(f)^{-1}$. È facile vedere che:

$$M(f^{-1}) = M(f)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -1 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

4. Osserviamo facilmente che $[(1,1,0),(0,2,1)]$ è una base di W. Dunque, affinché $f|_W = g$ deve accadere che si abbia:

$$\begin{cases} g(1,1,0) = f(1,1,0) \\ g(0,2,1) = f(0,2,1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (0,0,k) = (0,0,-1) \\ (-3k,-1,5k) = (3,-1,-5) \end{cases} \Rightarrow k = -1.$$

Sia, perciò, $k = -1$, per cui abbiamo:

$$\begin{cases} g(1,1,0) = (0,0,-1) \\ g(0,2,1) = (3,-1,-5). \end{cases}$$

Quindi, $g(W) = \mathscr{L}((0,0,-1),(3,-1,-5))$ ed è immediato vedere che $\dim g(W) = 2 = \dim W$. Questo significa che lo spazio vettoriale $U = g(W)$ e le sua equazione cartesiana è data da:

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 3 & -1 & -5 \\ x & y & z \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow -x-3y = 0.$$

Quindi, $U = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x+3y = 0\}$.

II

1. **5 punti.** È assegnato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}, u$. Sono dati la retta

$$r\colon \begin{cases} x+z+5 = 0 \\ y+2z+1 = 0, \end{cases}$$

il punto $P = (0,0,1)$ e il piano $\pi\colon x - z = 0$. Determinare:

   (a) il punto P' simmetrico di P rispetto alla retta r;

   (b) la distanza $d(P,r)$;

   (c) la distanza $d(P,\pi)$.

2. **5 punti.** È assegnato nel piano un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $O, \vec{x}, \vec{y}, u$. Studiare il fascio di coniche di equazione:

$$hx^2 + hy^2 + 2xy + 2y - h = 0,$$

al variare di $h \in \mathbb{R}$, determinandone, in particolare, punti base e coniche spezzate.

3. **5 punti.** È assegnato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}, u$. Studiare, al variare di $h \in \mathbb{R}$, le quadriche di equazione:

$$x^2 + y^2 + 2yz + hz^2 - 2y + h = 0.$$

Soluzione

1. Dal momento che la retta r ha parametri direttori $(-1,-2,1)$, il piano α ortogonale a r e passante per P ha equazione $\alpha\colon -x-2y+z-1=0$. Quindi, determiniamo il punto $H=\alpha\cap r$:

$$\begin{cases} x+z+5=0 \\ y+2z+1=0 \\ -x-2y+z-1=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-4 \\ y=1 \\ z=-1. \end{cases}$$

Quindi, otteniamo subito che $d(P,r)=\overline{PH}=\sqrt{21}$ e, inoltre, il punto $P'=(a,b,c)$ simmetrico di P rispetto alla retta r è allo stesso tempo il punto simmetrico di P rispetto a H. Dunque, deve essere:

$$\begin{cases} \dfrac{a}{2}=-4 \\ \dfrac{b}{2}=1 \\ \dfrac{c+1}{2}=-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=-8 \\ b=2 \\ c=-3. \end{cases}$$

Quindi, $P'=(-8,2,-3)$. È, poi, immediato vedere che:

$$d(P,\pi)=\frac{|-1|}{\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

2. Osserviamo che la conica nascosta del fascio ha equazione $x^2+y^2-1=0$, che è la circonferenza di centro l'origine e raggio 1. Inoltre, dato che:

$$B=\begin{pmatrix} h & 1 & 0 \\ 1 & h & 1 \\ 0 & 1 & -h \end{pmatrix}$$

e che $|B|=-h^3$, vediamo che l'unica conica spezzata del fascio è quello che si ottiene per $h=0$, che ha equazione $y(x+1)=0$. Per determinare i punti base del fascio occorre intersecare due qualsiasi coniche del fascio, per esempio:

$$\begin{cases} x^2+y^2-1=0 \\ y(x+1)=0. \end{cases}$$

Da qui vediamo che i punti base sono $(1,0)$ e $(-1,0)$, il primo contato una volta e il secondo tre volte.

Sia $h\neq 0$. In questo caso le coniche sono irriducibili. Da:

$$|A|=\begin{vmatrix} h & 1 \\ 1 & h \end{vmatrix}=h^2-1$$

abbiamo che per $h<-1$ e $h>1$ abbiamo delle ellissi reali, poiché i punti base sono reali; l'unica circonferenza del fascio è la conica nascosta del fascio; per $h=\pm1$ abbiamo due parabole; per $-1<h<1$, $h\neq 0$, abbiamo delle iperboli, nessuna delle quali è equilatera, in quanto $\mathrm{Tr}(A)=2h$ e per $h=0$ la conica è spezzata.

3. Le matrici associate sono:

$$B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & h & 0 \\ 0 & -1 & 0 & h \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & h \end{pmatrix}.$$

Si vede facilmente che $|B|=h^2-2h$ e $|A|=h-1$. Quindi, per $h=0,2$ abbiamo due coni e per $h=1$ abbiamo un paraboloide ellittico. Per $h\neq 0,1,2$ abbiamo ellissoidi o iperboloidi. Per stabilirlo consideriamo:

$$P_A(T)=\begin{vmatrix} 1-T & 0 & 0 \\ 0 & 1-T & 1 \\ 0 & 1 & h-T \end{vmatrix}=(1-T)[T^2-(h+1)T+h-1].$$

Ricordiamo che abbiamo un ellissoide quando gli autovalori di A sono dello stesso segno. Un primo autovalore è pari a $1 > 0$ e per la regola dei segni di Cartesio gli altri due autovalori sono positivi se:

$$\begin{cases} -(h+1) < 0 \\ h-1 > 0 \end{cases} \Rightarrow h > 1.$$

Quindi, per $h > 1$, $h \neq 2$ abbiamo degli ellissoidi. Ricordando che $|B| = h^2 - 2h$, vediamo che per $h < 0$ abbiamo degli iperboloidi iperbolici; per $0 < h < 1$ abbiamo degli iperboloidi ellittici; per $1 < h < 2$ abbiamo degli ellissoidi reali; per $h > 2$ abbiamo degli ellissoidi immaginari.