Corso di Laurea in Ingegneria Elettronica

Prova di **Algebra lineare e Geometria** - Appello 3 Luglio 2023

Durata della prova: 3 ore.
È vietato uscire dall'aula prima di aver consegnato definitivamente il compito.
È vietato consultare libri o appunti.

I

È assegnato $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tale che:

$$f(x,y,z) = (x+y+z, x+hy+2z, -x+2y+hz), \quad \forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3,$$

al variare di $h \in \mathbb{R}$.

1. **5 punti.** Studiare f, determinando in ciascun caso $\operatorname{Im} f$ e $\operatorname{Ker} f$ e le loro equazioni cartesiane.
2. **5 punti.** Studiare la semplicità di f nei casi $h = 0$ e $h = -1$, determinando, se possibile, una base di autovettori per f.
3. **5 punti.** Dato l'endomorfismo $g\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tale che:

$$\begin{aligned} g(1,1,0) &= (1,1,1) \\ g(0,1,0) &= (0,0,1) \\ g(0,0,1) &= (0,1,0), \end{aligned}$$

sia $\varphi = g \circ f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$. Calcolare $\varphi^{-1}(1,1,1)$, al variare di $h \in \mathbb{R}$.

Soluzione

1. Dal momento che:

$$|M(f)| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & h & 2 \\ -1 & 2 & h \end{vmatrix} = h^2 - 4,$$

vediamo che per $h \neq \pm 2$ l'endomorfismo f è un isomorfismo, per cui si ha che f è iniettiva e suriettiva e, dunque, $\operatorname{Im} f = \mathbb{R}^3$ e $\operatorname{Ker} f = \{(0,0,0)\}$.

Sia $h = 2$. In tal caso si ha:

$$M(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{riducendo}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

per cui $\dim \operatorname{Im} f = \rho(M(f)) = 2$. Inoltre, una sua base è data da $[(1,1,-1),(1,2,2)]$ e da:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 2 \\ x & y & z \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow 4x - 3y + z = 0$$

vediamo che $\operatorname{Im} f = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 4x - 3y + z = 0\}$. Inoltre, si ha $\dim \operatorname{Ker} f = 1$ e:

$$\operatorname{Ker} f = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x+y+z = 0,\ y+z = 0\} = \mathscr{L}((0,1,-1)).$$

Sia $h = -2$. In tal caso si ha:

$$M(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \\ -1 & 2 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{riducendo}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

per cui $\dim \mathrm{Im} f = \rho(M(f)) = 2$. Inoltre, una sua base è data da $[(1,1,-1),(1,-2,2)]$ e da:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 2 \\ x & y & z \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow -3y-3z=0$$

vediamo che $\mathrm{Im} f = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid y+z=0\}$. Inoltre, si ha $\dim \mathrm{Ker} f = 1$ e:

$$\mathrm{Ker} f = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x+y+z=0,\ -3y+z=0\} = \mathscr{L}((-4,1,3)).$$

2. Sia $h=0$. In tal caso si ha:

$$P(T) = \begin{vmatrix} 1-T & 1 & 1 \\ 1 & -T & 2 \\ -1 & 2 & -T \end{vmatrix} = (1-T)(T^2-4).$$

Questo vuol dire che gli autovalori sono 1, 2 e -2, tutti di molteplicità algebrica 1, per cui possiamo dire che in questo caso f è semplice ed è possibile determinare una base di autovettori.

Sia $T=1$. Sappiamo che $V_1 = \mathrm{Ker} f_1$, dove $f_1 = f - i$ e:

$$M(f_1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{riducendo}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

per cui:

$$V_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid y+z=0,\ x+3z=0\} = \mathscr{L}((-3,-1,1)).$$

Sia $T=2$. Sappiamo che $V_2 = \mathrm{Ker} f_2$, dove $f_2 = f - 2i$ e:

$$M(f_2) = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \\ -1 & 2 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{riducendo}} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

per cui:

$$V_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid -x+y+z=0,\ -y+3z=0\} = \mathscr{L}((4,3,1)).$$

Sia $T=-2$. Sappiamo che $V_{-2} = \mathrm{Ker} f_{-2}$, dove $f_{-2} = f + 2i$ e:

$$M(f_{-2}) = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{riducendo}} \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ -5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

per cui:

$$V_{-2} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 3x+y+z=0,\ -5x=0\} = \mathscr{L}((0,1,-1)).$$

Quindi, per $h=0$ una base di autovettori è $[(-3,-1,1),(4,3,1),(0,1,-1)]$.

Sia $h=-1$. In questo caso si ha:

$$P(T) = \begin{vmatrix} 1-T & 1 & 1 \\ 1 & -1-T & 2 \\ -1 & 2 & -1-T \end{vmatrix} = (1-T)(T^2+2T-3) = -(T-1)^2(T+3).$$

Quindi, gli autovalori sono 1 e -3, con $m_1 = 2$ e $m_{-3} = 1$. Sappiamo che necessariamente si ha $\dim V_{-3} = m_{-3} = 1$, mentre $1 \le \dim V_1 \le m_1 = 2$. Quindi, f è semplice per $h=-1$ solo se $\dim V_1 = m_1 = 2$.

Sia, dunque, $T=1$. Sappiamo che $f_1 = \mathrm{Ker} f_1$, dove $f_1 = f - i$ e:

$$M(f_1) = M(f) - I = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \\ -1 & 2 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{riducendo}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Quindi, $\dim V_1 = 3 - \rho(M(f_1)) = 1 < 2 = m_1$. Ciò significa che per $h=-1$ l'endomorfismo f non è semplice e non è possibile, di conseguenza, determinare una base di autovettori per f.

3. Dalle condizioni date è semplice vedere che:

$$M(g) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

per cui:

$$M(\varphi) = M(g) \cdot M(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & h+1 \\ 1 & h & 2 \end{pmatrix}.$$

Inoltre, $|M(\varphi)| = |M(g)| \cdot |M(f)| = 4 - h^2$. Questo vuol dire che per $h \neq \pm 2$ possiamo applicare il metodo di Cramer per determinare $\varphi^{-1}(1,1,1)$ e abbiamo:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & h+1 \\ 1 & h & 2 \end{vmatrix}}{4-h^2} = \frac{h+1}{h+2},$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & h+1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}}{4-h^2} = \frac{1}{4-h^2},$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & h & 1 \end{vmatrix}}{4-h^2} = \frac{h-1}{h^2-4}.$$

Questo vuol dire che per $h \neq \pm 2$ si ha:

$$\varphi^{-1}(1,1,1) = \left\{ \left(\frac{h+1}{h+2}, \frac{1}{4-h^2}, \frac{h-1}{h^2-4} \right) \right\}.$$

Sia $h = 2$. In questo caso vediamo che occorre risolvere il sistema avente matrice completa associata:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{\text{riducendo}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{3} \end{array} \right).$$

Questo vuol dire che per $h = 2$ il sistema è impossibile e si ha $\varphi^{-1}(1,1,1) = \emptyset$.

Sia $h = 2$. In questo caso vediamo che occorre risolvere il sistema avente matrice completa associata:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 2 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{\text{riducendo}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{array} \right).$$

Questo vuol dire che anche per $h = -2$ il sistema è impossibile e si ha $\varphi^{-1}(1,1,1) = \emptyset$.

II

1. **5 punti.** È assegnato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}, u$. Sono dati il piano $\pi\colon\ x + 2y - z + 3 = 0$ e il punto $P = (-1, 1, 2)$. Determinare:
   - la retta r ortogonale a π e passante per P;
   - il piano α parallelo a π e passante per P;
   - la retta s parallela a π e al piano $z = 0$ e passante per P.

2. **5 punti.** È assegnato nel piano un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $O, \vec{x}, \vec{y}, u$. Determinare e studiare il fascio di coniche passanti per i punti $A = (0,1)$, $B = (1,0)$ e tangenti in $C = (-1,-2)$ alla retta $x + 1 = 0$.

3. **5 punti.** È assegnato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}, u$. Determinare la natura del paraboloide contenente la conica di equazioni:

$$\Gamma\colon \begin{cases} x^2 - y^2 - 1 = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

e passante per i punti $P_1 = (1,0,1)$, $P_2 = (0,1,1)$ e $P_3 = (0,0,1)$.

4. **ESERCIZIO BONUS: 5 punti.** È assegnato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}, u$. Sono date le rette:

$$r_1\colon \begin{cases} x - y + 1 = 0 \\ z = 2 \end{cases} \quad \text{e} \quad r_2\colon \begin{cases} x = 0 \\ y = -1. \end{cases}$$

Mostrare che sono sghembe e determinare la retta t ortogonale e incidente entrambe le rette.

Soluzione

1. È facile vedere che:

$$r\colon \begin{cases} 2x - y + 3 = 0 \\ x + z - 1 = 0 \end{cases}$$

e che $\alpha\colon x + 2y - z + 1 = 0$. Inoltre, se β è il piano parallelo a $z = 0$ e passante per P si ha che $s = \alpha \cap \beta$. Essendo $\beta\colon z = 2$, abbiamo:

$$s\colon \begin{cases} x + 2y - z + 1 = 0 \\ z = 2. \end{cases}$$

2. Le coniche spezzate del fascio sono quelle di equazioni $(x+1)(x+y-1) = 0$ e $(3x-y+1)(x-y-1) = 0$, per cui il fascio cercato ha equazione:

$$h(x+1)(x+y-1) + (3x-y+1)(x-y-1) = 0 \Rightarrow (h+3)x^2 + (h-4)xy + y^2 - 2x + hy - h - 1 = 0.$$

Dato che le coniche spezzate del fascio sono solamente le due utilizzate per scriverne l'equazione, possiamo dire che per $h \neq 0$ le coniche sono irriducibili, mentre per $h = 0$ abbiamo una conica spezzata. Inoltre, da:

$$|A| = \det \begin{pmatrix} h+3 & \dfrac{h-4}{2} \\ \dfrac{h-4}{2} & 1 \end{pmatrix} = \frac{-h^2 + 12h - 4}{4}$$

vediamo che per $h = 6 \pm 4\sqrt{2}$ abbiamo due parabole; per $6 - 4\sqrt{2} < h < 6 + 4\sqrt{2}$ abbiamo due ellissi, tra le quali non figurano circonferenze; per $h < 6 - 4\sqrt{2}$, $h \neq 0$, e $h > 6 + 4\sqrt{2}$ abbiamo delle iperboli, tra le quali per $h = -2$ ne abbiamo una equilatera.

3. Il paraboloide dato può essere iperbolico o ellittico. Ricordando che i paraboloidi iperbolici non contengono ellissi e che quelli ellittici non contengono iperboli e notando che Γ è un'iperbole, concludiamo che il paraboloide dato è un paraboloide iperbolico.

4. È facile vedere che le due rette non sono incidenti. Non sono nemmeno parallele, in quanto la retta r_1 ha parametri direttori $(1,1,0)$ e la retta r_2 ha parametri direttori $(0,0,1)$. Il generico punto di r_1 è $R_1 = (0,-1,a)$ e il generico punto di r_2 è $R_2 = (b, b+1, 2)$. La retta cercata è una passa per R_1 e R_2 per qualche valore di a e b. Quindi, il vettore $\overrightarrow{R_1R_2}$, che ha componenti $(b, b+2, 2-a)$, deve essere ortogonale ai vettori di componenti $(0,0,1)$ e $(1,1,0)$. Questo vuol dire che deve essere:

$$\begin{cases} 2 - a = 0 \\ b + b + 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = -1. \end{cases}$$

Quindi, la retta cercata è la retta passante per i punti $R_1 = (0,-1,2)$ e $R_2 = (-1,0,2)$ ed è semplice vedere che essa ha equazioni:

$$\begin{cases} x + y + 1 = 0 \\ z = 2. \end{cases}$$