Corso di Laurea in Ingegneria Elettronica

Prova di **Algebra lineare e Geometria** - Appello 29 Settembre 2023

Durata della prova: 3 ore.
È vietato uscire dall'aula prima di aver consegnato definitivamente il compito.
È vietato consultare libri o appunti.

I

È assegnato $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tale che:

$$f(x,y,z) = (hx - y + z, -hx + y - z, hx + hy + hz), \quad \forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$$

al variare di $h \in \mathbb{R}$.

1. **5 punti.** Studiare f, determinando in ciascun caso $\operatorname{Im} f$ e $\operatorname{Ker} f$ e le loro equazioni cartesiane.

2. **5 punti.** Studiare la semplicità di f nei casi $h = 1$ e $h = -1$, determinando, se possibile, una base di autovettori per f.

3. **5 punti.** È assegnato l'endomorfismo $g: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tale che:

$$M(g) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

   Posto $h = 1$, sia $\varphi = f + g$. Stabilire se φ è invertibile e calcolare, se possibile, $M(\varphi^{-1})$.

4. **ESERCIZIO BONUS: 5 punti.** Determinare l'endomorfismo $\psi: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ tale che:

   - $\operatorname{Ker}\psi = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid x - y = 0,\ z - t = 0\}$;
   - $(1,0,1,0) \in V_2$;
   - $\psi(0,0,0,1) = (h,0,h,2)$,

   al variare di $h \in \mathbb{R}$. Determinare il valore di $h \in \mathbb{R}$ per il quale ψ è semplice.

Soluzione

1. La matrice associata è:

$$M(f) = \begin{pmatrix} h & -1 & 1 \\ -h & 1 & -1 \\ h & h & h \end{pmatrix}$$

   e, essendo $|M(f)| = 0$ per ogni $h \in \mathbb{R}$, dobbiamo ridurre la matrice:

$$M(f) = \begin{pmatrix} h & -1 & 1 \\ -h & 1 & -1 \\ h & h & h \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{riducendo}} \begin{pmatrix} h & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ h - h^2 & 2h & 0 \end{pmatrix}.$$

   È, dunque, evidente che $\rho(Mf) = 2$ per $h \neq 0$, mentre $\rho(M(f)) = 1$ per $h = 0$.

   Sia $h \neq 0$. In questo caso abbiamo $\dim \operatorname{Im} f = 2$ e una sua base è data da $[(-1,1,h),(1,-1,h)]$. Inoltre, da:

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 & h \\ 1 & -1 & h \\ x & y & z \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow 2hx + 2hy = 0$$

vediamo che $\operatorname{Im} f = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x+y=0\}$. Sappiamo anche che $\dim \operatorname{Ker} f = 1$ e:

$$\operatorname{Ker} f = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid hx - y + z = 0,\ (h-h^2)x + 2hy = 0\} = \mathscr{L}((2, h-1, -h-1)).$$

Sia $h=0$. In questo caso, vediamo che $\dim \operatorname{Im} f = 1$ e $\operatorname{Im} f = \mathscr{L}((-1,1,0))$ e da:

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ x & y & z \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{riducendo}} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ x+y & 0 & z \end{pmatrix}$$

vediamo che $\operatorname{Im} f = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x+y=0,\ z=0\}$. Inoltre, $\dim \operatorname{Ker} f = 2$ e:

$$\operatorname{Ker} f = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid -y+z=0\} = \mathscr{L}((1,0,0),(0,1,1)).$$

2. Sia $h=1$. In questo caso:

$$P(T) = \begin{vmatrix} 1-T & -1 & 1 \\ -1 & 1-T & -1 \\ 1 & 1 & 1-T \end{vmatrix} = T(T-2)(1-T).$$

Quindi, gli autovalori sono 0, 1 e 2, tutti di molteplicità algebrica 1, per cui f è semplice e possiamo determinare una base di autovettori per f.

Sia $T=0$. Sappiamo che $V_0 = \operatorname{Ker} f = \mathscr{L}((2,0-2)) = \mathscr{L}((1,0,-1))$, per quanto visto nel punto precedente.

Sia $T=1$. Sappiamo che $V_1 = \operatorname{Ker} f_1$, dove $f_1 = f - i$ e:

$$M(f_1) = M(f) - I = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{riducendo}} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

per cui:

$$V_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid -y+z=0,\ -x-z=0\} = \mathscr{L}((-1,1,1)).$$

Sia $T=2$. Sappiamo che $V_2 = \operatorname{Ker} f_2$, dove $f_2 = f - 2i$ e:

$$M(f_2) = M(f) - 2I = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{riducendo}} \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

per cui:

$$V_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid -x-y+z=0,\ -2z=0\} = \mathscr{L}((1,-1,0)).$$

Quindi, per $h=1$ una base di autovettori è $[(1,0,-1),(-1,1,1),(1,-1,0)]$.

Sia $h=-1$. In questo caso:

$$P(T) = \begin{vmatrix} -1-T & -1 & 1 \\ 1 & 1-T & -1 \\ -1 & -1 & -1-T \end{vmatrix} = T^2(-1-T).$$

Quindi, gli autovalori sono 0 e -1, con $m_0 = 2$ e $m_{-1} = 1$. Sappiamo che $V_0 = \operatorname{Ker} f$ e abbiamo visto in precedenza che per $h=-1$ si ha $\dim V_0 = 1 < 2 = m_0$. Quetso vuol dire che per $h=-1$ f non è semplice e non è possibile, perciò, in questo caso, determinare una base di autovettori per f.

3. Sappiamo che:

$$M(\varphi) = M(f) + M(g) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Essendo $|M(\varphi)| = -1 \neq 0$, possiamo dire che φ è invertibile e si ha:

$$M(\varphi^{-1}) = M(\varphi)^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

4. Dato che $\operatorname{Ker}\psi = \mathscr{L}((1,1,0,0),(0,0,1,1))$, ne segue che $\psi(1,1,0,0) = (0,0,0,0)$ e $\psi(0,0,1,1) = (0,0,0,0)$. Inoltre, se $(1,0,1,0) \in V_2$, allora deve essere $\psi(1,0,1,0) = (2,0,2,0)$. Osserviamo, poi che, posti $v_1 = (1,1,0,0)$, $v_2 = (0,0,1,1)$, $v_3 = (1,0,1,0)$ e $v_4 = (0,0,0,1)$, si ha che $\mathscr{A} = [v_1, v_2, v_3, v_4]$ è una base di $\mathbb{R}^4$ e le condizioni:

$$\begin{aligned}
\psi(v_1) &= (0,0,0,0)\\
\psi(v_2) &= (0,0,0,0)\\
\psi(v_3) &= 2v_3\\
\psi(v_4) &= (h,0,h,2) = hv_3 + 2v_4
\end{aligned}$$

definiscono ψ in maniera univoca. Inoltre, abbiamo:

$$M^{\mathscr{A}}(\psi) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 2 & h\\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

per cui è facile vedere che $P(T) = T^2(2-T)^2$. Quindi, gli autovalori sono 0 e 2, con $m_0 = 2$ e $m_2 = 2$. Sappiamo che $V_0 = \operatorname{Ker}\psi$ e che $\dim \operatorname{Ker}\psi = 2 = m_0$. Questo vuol dire che affinché ψ sia semplice deve essere $\dim V_2 = m_2 = 2$. Sappiamo che $V_2 = \operatorname{Ker}\psi_2$, dove $\psi_2 = \psi - 2i$ e:

$$M(\psi_2) = M(\psi) - 2I = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & h\\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ed è evidente che per $h = 0$ abbiamo $\dim V_2 = 2$, mentre per $h \neq 0$ abbiamo $\dim V_2 = 1$. Quindi, concludiamo che ψ è semplice per $h = 0$.

II

1. **5 punti.** È assegnato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}, u$. Sono dati il piano $\pi\colon\ x + y - 1 = 0$, la retta

$$r\colon \begin{cases} 2x + y + 2z = 0\\ x + 2y + 3z = 0 \end{cases}$$

e il punto $P = (1,-1,-3)$. Determinare:

- il piano α ortogonale al piano π, parallelo alla retta r e passante per P;
- le distanze $d(r,\alpha)$ e $d(r,\pi)$.

2. **5 punti.** È assegnato nel piano un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $O, \vec{x}, \vec{y}, u$. Studiare il fascio di coniche di equazione:

$$(h+2)x^2 - 2xy - y^2 + 2x + 1 = 0,$$

determinando, in particolare, punti base e coniche spezzate.

3. **5 punti.** È assegnato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}, u$. Studiare le quadriche di equazione:

$$hx^2 + 2xy - y^2 - z^2 + 4z + h = 0,$$

al variare di $h \in \mathbb{R}$.

Soluzione

1. Siano (a,b,c) le componenti di un vettore ortogonale al piano α. Dal momento che la retta r ha parametri direttori $(-1,-4,3)$, deve essere:

$$\begin{cases} -a - 4b + 3c = 0\\ a + b = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = -a\\ c = -a, \end{cases}$$

per cui possiamo dire che $(1,-1,-1)$ sono le componenti di un vettore ortogonale al piano α e si vede facilmente che $\alpha\colon\ x-y-z-5=0$.

Per quanto riguarda $d(r,\alpha)$, osserviamo che r è parallelo ad α, per cui la distanza di r da α è la distanza di un qualsiasi punto di r da α. Dato che $O=(0,0,0)\in r$ abbiamo:

$$d(r,\alpha)=d(O,\alpha)=\frac{5}{\sqrt{3}}.$$

Per quanto riguarda $d(r,\pi)$, osserviamo che i vettori di componenti $(-1,-4,3)$ e $(1,-1,0)$ non sono ortogonali, per cui r e π non sono paralleli. Questo vuol dire che sono incidenti, da cui segue che $d(r,\pi)=0$.

2. Osserviamo che la conica nascosta ha equazione $x^2=0$. Inoltre:

$$B=\begin{pmatrix} h+2 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

per cui $|B|=-h-2$. Questo vuol dire che abbiamo un'altra conica spezzata per $h=-2$, di equazione $(y-1)(2x+y+1)=0$, e per $h\neq-2$ le coniche sono irriducibili. Per quanto riguarda i punti base, da:

$$\begin{cases} x^2=0 \\ (y-1)(2x+y+1)=0 \end{cases}$$

vediamo che sono i punti $(0,1)$ e $(0,-1)$, entrambi contati due volte. Inoltre, da:

$$|A|=\begin{vmatrix} h+2 & -1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix}=-h-3$$

vediamo che per $h<-3$ abbiamo delle ellissi, tra le quali non figurano circonferenze; per $h=-3$ abbiamo una parabola; per $h>-3$, $h\neq-2$, abbiamo delle iperbole, tra le quali figura una equilatera per $h=-1$, in quanto $\mathrm{Tr}(A)=h+1$.

3. Le matrici associate sono:

$$B=\begin{pmatrix} h & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & h \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad A=\begin{pmatrix} h & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Abbiamo $|B|=(h+1)(h+4)$ e $|A|=h+1$. Quindi, per $h=-4$ abbiamo un cono, mentre per $h=-1$ abbiamo in cilindro, poiché si verifica che per $h=-1$ abbiamo $\rho(B)=3$.

Per $h\neq-4,-1$ abbiamo ellissoidi o iperboloidi. Per verificarlo, consideriamo:

$$P_A(T)=\begin{vmatrix} h-T & 1 & 0 \\ 1 & -1-T & 0 \\ 0 & 0 & -1-T \end{vmatrix}=(-1-T)[T^2-(h-1)T-h-1].$$

Un autovalore è certamente $-1<0$, per cui per la regola dei segni di Cartesio abbiamo anche gli altri due autovalori negativi se:

$$\begin{cases} h-1<0 \\ -h-1>0 \end{cases} \Rightarrow -1<h<1.$$

Quindi, concludiamo che abbiamo ellissoidi per $-1<h<1$, mentre negli altri casi, con $h\neq-1,-4$, abbiamo degli iperboloidi. Guardando il segno di $|B|$, concludiamo, perciò, che per $h<-4$ e $h>1$ abbiamo degli iperboloidi iperbolici; per $-4<h<-1$ abbiamo degli iperboloidi ellittici; per $-1<h<1$ abbiamo degli ellissoidi immaginari.