# Corso di Laurea in Ingegneria Industriale (F-O) e (P-Z)

Prova di **Algebra lineare e Geometria** - Appello 27 Giugno 2023

---

*Durata della prova: 3 ore.*
*È vietato uscire dall'aula prima di aver consegnato definitivamente il compito.*
*È vietato consultare libri o appunti.*

---

**I**

Sia $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'endomorfismo definito dalle assegnazioni:

$$\begin{cases} f(1,1,1) = (h+1, 0, h+1) \\ f(1,0,1) = (0, h+1, h+1) \\ f(0,1,1) = (h,h,h), \end{cases}$$

al variare di $h \in \mathbb{R}$.

1. **5 punti.** Studiare $f$, determinando in ciascun caso $\operatorname{Im} f$ e $\operatorname{Ker} f$ e le loro equazioni cartesiane.
2. **5 punti.** È dato l'endomorfismo $g\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tale che:

   $$g(x,y,z) = (x+hz, hx+z, hx-y+2z), \quad \forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3.$$

   Studiare la semplicità di $g$ al variare di $h \in \mathbb{R}$, determinando, se possibile, una base di autovettori nei casi $h=0$ e $h=2$.
3. **5 punti.** Sono dati $V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x+y-z=0\}$ e $g'\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tale che:

   $$M(g') = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & h & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

   Posto $\varphi = g \circ g'\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, calcolare $\varphi(V)$ al variare di $h \in \mathbb{R}$, determinandone in ciascun caso la dimensione.
4. **ESERCIZIO BONUS: 5 punti.** Sono assegnati i vettori $w_1 = (1,0,0,1)$, $w_2 = (0,1,0,1)$, $w_3 = (0,0,1,1) \in \mathbb{R}^4$ e i sottospazi $W = \mathscr{L}(w_1, w_2, w_3)$ e $U = \mathscr{L}(w_1, w_3) \subset \mathbb{R}^4$. Determinare l'endomorfismo $\psi\colon W \to W$ tale che:

   (a) $w_1 \in V_1$

   (b) $w_2 \in Ker\psi$

   (c) $\psi(w_3) = hw_1 + (h+1)w_2 - w_3$.

   Determinare il valore di $h \in \mathbb{R}$ per il quale la restrizione $\psi|_U$ induce un endomorfismo $\psi'\colon U \to U$.

*Soluzione*

1. Dalle assegnazioni date è facile ricavare che:

   $$M(f) = \begin{pmatrix} 1 & h+1 & -1 \\ -h & -h-1 & 2h+1 \\ 1 & 0 & h \end{pmatrix},$$

   da cui otteniamo che $|M(f)| = h(h+1)^2$. Questo vuol dire che per $h \neq 0, -1$ $f$ è un isomorfismo, il che vuol dire che $f$ è iniettiva e suriettiva. Dunque, in tali casi si ha $\operatorname{Im} f = \mathbb{R}^3$ e $\operatorname{Ker} f = \{(0,0,0)\}$.

Sia $h = 0$. In questo caso abbiamo:

$$M(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{riducendo}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dunque, si ha $\dim \operatorname{Im} f = \rho(M(f)) = 2$ e una sua base è data da $[(1,0,1),(1,-1,0)]$, per cui da:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ x & y & z \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow x + y - z = 0$$

otteniamo che $\operatorname{Im} f = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y - z = 0\}$. Inoltre, abbiamo che:

$$\operatorname{Ker} f = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y - z = 0, -y + z = 0\} = \mathscr{L}((0,1,1)).$$

Sia $h = -1$. In questo caso abbiamo:

$$M(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Dunque, si ha $\dim \operatorname{Im} f = \rho(M(f)) = 1$ e una sua base è data da $[(1,0,-1)]$, per cui da:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ x & y & z \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{riducendo}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ x+z & y & 0 \end{pmatrix}$$

otteniamo che $\operatorname{Im} f = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + z = y = 0\}$. Inoltre, abbiamo che:

$$\operatorname{Ker} f = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - z = 0\} = \mathscr{L}((1,0,1),(0,1,0)).$$

2. Dato che:

$$M(g) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & h \\ h & 0 & 1 \\ h & -1 & 2 \end{pmatrix},$$

abbiamo:

$$P(T) = \begin{vmatrix} 1-T & 0 & h \\ h & -T & 1 \\ h & -1 & 2-T \end{vmatrix} = (1-T)(T^2 - 2T - h^2 + 1),$$

per cui gli autovalori sono $1$, $1+h$, $1-h$. Essi sono distinti a due a due per $h \neq 0$, per cui possiamo dire che certamente per $h \neq 0$ $g$ è semplice.

Sia, dunque, $h = 2$. In tal caso, gli autovalori sono $1$, $3$, $-1$. Sia $T = 1$. Sappiamo che $V_1 = \operatorname{Ker} g_1$, dove $g_1 = g - i$ e:

$$M(g_1) = M(g) - I = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{riducendo}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Quindi:

$$V_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2z = 0, 2x - y = 0\} = \mathscr{L}((1,2,0)).$$

Sia $T = 3$. Sappiamo che $V_3 = \operatorname{Ker} g_3$, dove $g_3 = g - 3i$ e:

$$M(g_3) = M(g) - 3I = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 2 & -3 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{riducendo}} \begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Quindi:

$$V_3 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid -2x + 2z = 0, -3y + 3z = 0\} = \mathscr{L}((1,1,1)).$$

Sia $T=-1$. Sappiamo che $V_{-1}=\operatorname{Ker} g_{-1}$, dove $g_{-1}=g+i$ e:

$$M(g_{-1})=M(g)+I=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{riducendo}} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Quindi:

$$V_{-1}=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid 2x+2z=0,\ y-z=0\}=\mathscr{L}((1,-1,-1)).$$

Quindi, per $h=2$ una base di autovettori è $[(1,2,0),(1,1,1),(1,-1,-1)]$.

Sia $h=0$. In questo caso, l'unico autovalore è 1 con $m_1=3$, per cui $g$ è semplice solo se $\dim V_1=m_1=3$. Sappiamo che $V_1=\operatorname{Ker} g_1$, con $g_1=g-i$. Essendo:

$$M(g_1)=M(g)-I=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix},$$

vediamo che $\dim V_1=3-\rho(M(g_1))=2<3=m_1$, per cui per $h=0$ $g$ non è semplice.

3. Sappiamo che:

$$M(\varphi)=M(g)\cdot M(g')=\begin{pmatrix} 1 & h & 1-h \\ h & 1 & h-1 \\ h & 2-h & h-2 \end{pmatrix}.$$

Inoltre, essendo $V=\mathscr{L}((1,0,1),(0,1,1))$, sappiamo che:

$$\varphi(V)=\mathscr{L}(\varphi(1,0,1),\varphi(0,1,1))=\mathscr{L}((2-h,2h-1,2h-2),(1,h,0)).$$

Da:

$$\begin{pmatrix} 2-h & 2h-1 & 2h-2 \\ 1 & h & 0 \end{pmatrix}$$

vediamo che $\dim\varphi(V)=2$ per $h\neq 1$, per cui $[(2-h,2h-1,2h-2),(1,h,0)]$ è una sua base, mentre $\dim\varphi(V)=1$ per $h=1$, per cui, in tal caso, una base è data semplicemente da $[(1,1,0)]$.

4. Osserviamo che $\dim W=3$, per cui l'endomorfismo è perfettamente determinato dalle assegnazioni:

$$\begin{cases} \psi(w_1)=w_1 \\ \psi(w_2)=(0,0,0,0) \\ \psi(w_3)=hw_1+(h+1)w_2-w_3. \end{cases}$$

Essendo $w_1,w_2,w_3$ linearmente indipendenti ed essendo $U=(w_1,w_3)$, vediamo che $\psi(U)=\mathscr{L}(\psi(w_1),\psi(w_3))=\mathscr{L}(w_1,hw_1+(h+1)w_2-w_3)$, per cui $\psi(U)\subseteq U$ se e solo se $h+1=0$, cioè per $h=-1$. Questo vuol dire che il valore di $h$ per il quale $\psi|_U$ induce un endomorfismo di $U$ è $h=-1$.

## II

1. **5 punti.** È assegnato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $O,\vec{x},\vec{y},\vec{z},u$. Date le rette:

$$r_1\colon \begin{cases} x-y+z+1=0 \\ 2x+y-z+2=0 \end{cases} \quad \text{e} \quad r_2\colon \begin{cases} 2x+y+z=0 \\ 3x-y+z=0, \end{cases}$$

determinare la retta $s$ ortogonale a $r_1$ e $r_2$ e passante per $A=(1,0,1)$; determinare il piano $\pi$ ortogonale a $r_1$ e passante per l'origine $O$; determinare la retta $t$ parallela a $r_2$ e passante per $A$.

2. **5 punti.** È assegnato nel piano un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $O,\vec{x},\vec{y},u$. Determinare e studiare il fascio di coniche tangenti alle rette $p_1\colon x-y=0$ e $p_2\colon x+y=0$ nei punti in cui essi incontrano la retta $q\colon x-1=0$.

3. **5 punti.** È assegnato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}, u$. Data la conica:

$$\Gamma\colon \begin{cases} x^2 - 2y^2 + 2y + 1 = 0 \\ z = 0, \end{cases}$$

determinare il cono contenente $\Gamma$ e avente vertice $V_1 = (0,1,1)$ e il cilindro contenente $\Gamma$ e avente vertice $V_2 = (1,0,1,0)$.

*Soluzione*

1. Le rette $r_1$ e $r_2$ hanno parametri direttori, rispettivamente, $(0,1,1)$ e $(2,1,-5)$. Quindi, se $(l,m,n)$ sono parametri direttori di $s$, deve essere:

$$\begin{cases} m+n=0 \\ 2l+m-5n=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} l=-3m \\ n=-m. \end{cases}$$

Quindi, possiamo dire che $s$ ha parametri direttori $(-3,1,-1)$, per cui:

$$s\colon \frac{x-1}{-3} = y = \frac{z-1}{-1} \Rightarrow s\colon \begin{cases} x+3y-1=0 \\ y+z-1=0. \end{cases}$$

Inoltre, è semplice vedere che:

$$\pi\colon\ y+z=0$$

e che:

$$t\colon \begin{cases} 2x+y+z-3=0 \\ 3x-y+z-4=0. \end{cases}$$

2. Il fascio di coniche ha equazione:

$$h(x+y)(x-y)+(x-1)^2=0 \Rightarrow (h+1)x^2-hy^2-2x+1=0.$$

Dal momento che le coniche spezzate del fascio sono unicamente le due utilizzate per scriverne l'equazione, possiamo dire che per $h \neq 0$ le coniche sono irriducibili, mentre per $h=0$ abbiamo una conica spezzata. Inoltre, da:

$$A = \begin{pmatrix} h+1 & 0 \\ 0 & -h \end{pmatrix},$$

vediamo che $|A| = -h(h+1)$, per cui per $h=-1$ abbiamo una parabola (per $h=0$ la conica è spezzata); per $-1<h<0$ abbiamo delle ellissi, tra le quali figura una circonferenza per $h=-\frac{1}{2}$; per $h<-1$ e $h>0$ abbiamo delle iperboli, nessuna delle quali è equilatera.

3. Le quadriche contenenti la conica data hanno equazione:

$$x^2-2y^2+2y+1+z(ax+by+cz+d)=0 \Rightarrow x^2-2y^2+axz+byz+cz^2+2y+dz+1=0.$$

Per determinare il cono dobbiamo imporre che si abbia:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{a}{2} & 0 \\ 0 & -2 & \frac{b}{2} & 1 \\ \frac{a}{2} & \frac{b}{2} & c & \frac{d}{2} \\ 0 & 1 & \frac{d}{2} & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{a}{2}=0 \\ -2+\frac{b}{2}+1=0 \\ \frac{b}{2}+c+\frac{d}{2}=0 \\ 1+\frac{d}{2}+1=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=0 \\ b=2 \\ c=1 \\ d=-4, \end{cases}$$

per cui il cono cercato ha equazione:

$$x^2 - 2y^2 + 2yz + z^2 + 2y - 4z + 1 = 0.$$

Per determinare il cilindro dobbiamo imporre che si abbia:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{a}{2} & 0 \\ 0 & -2 & \frac{b}{2} & 1 \\ \frac{a}{2} & \frac{b}{2} & c & \frac{d}{2} \\ 0 & 1 & \frac{d}{2} & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 1 + \frac{a}{2} = 0 \\ \frac{b}{2} = 0 \\ \frac{a}{2} + c = 0 \\ \frac{d}{2} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -2 \\ b = 0 \\ c = 1 \\ d = 0, \end{cases}$$

per cui il cilindro cercato ha equazione:

$$x^2 - 2y^2 - 2xz + z^2 + 2y + 1 = 0.$$