Corso di Laurea in Ingegneria Industriale (F-O)

Prova di **Algebra lineare e Geometria**- Appello 24 Gennaio 2023

Durata della prova: 3 ore.
È vietato uscire dall'aula prima di aver consegnato definitivamente il compito.
È vietato consultare libri o appunti.

I

1. **5 punti.** Sia $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'endomorfismo definito da:
$$f(x,y,z) = (hx+z, x+y+z, x+hz) \quad \forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$$
al variare di $h \in \mathbb{R}$. Studiare la semplicità di f al variare di $h \in \mathbb{R}$, determinando, ove possibile, una base di autovettori per f.

2. **5 punti.** Sia $g\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'endomorfismo definito dalle assegnazioni:
$$\begin{aligned} g(1,1,0) &= (2,2,0) \\ g(0,1,1) &= (0,-h,-h) \\ g(1,0,0) &= (1,2-h,-1) \end{aligned}$$
al variare di $h \in \mathbb{R}$. Studiare l'endomorfismo g, determinando in ciascun caso $\operatorname{Im} f$ e $\operatorname{Ker} f$ e le loro equazioni cartesiane.

3. **5 punti.** Dato l'endomorfismo g del punto precedente, determinare, al variare di $h \in \mathbb{R}$, $g^{-1}(0,1,1)$.

Soluzione

1. È facile vedere che:
$$P(T) = \begin{pmatrix} h & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & h \end{pmatrix}$$
e
$$P(T) = \begin{vmatrix} h-T & 0 & 1 \\ 1 & 1-T & 1 \\ 1 & 0 & h-T \end{vmatrix} = (1-T)\begin{vmatrix} h-T & 1 \\ 1 & h-T \end{vmatrix} = (1-T)(h+1-T)(h-1-T).$$
Quindi, gli autovalori sono 1, $h+1$ e $h-1$. Essi sono tutti distinti di molteplicità algebrica 1 per $h \neq 0,2$. Ciò vuol dire che per $h \neq 0,2$ l'endomorfismo f è certamente semplice ed è possibile, in tal caso, determinare una base di autovettori.
Sia, dunque, $h \neq 0,2$. Sia $T=1$. Sappiamo che $V_1 = \operatorname{Ker} f_1$, dove $f_1 = f - i$ e:
$$M(f_1) = M(f) - I = \begin{pmatrix} h-1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & h-1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{riducendo, con } h\neq 2} \begin{pmatrix} h-1 & 0 & 1 \\ 2-h & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$
Quindi:
$$V_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid (h-1)x + z = 0,\ (2-h)x = 0\} = \mathcal{L}((0,1,0)).$$
Sia $T = h+1$. Sappiamo che $V_{h+1} = \operatorname{Ker} f_{h+1}$, dove $f_{h+1} = f - (h+1)i$ e:
$$M(f_{h+1}) = M(f) - (h+1)I = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & -h & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{riducendo}} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -h & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Quindi:
$$V_{h+1} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid -x+z=0,\ -hy+2z=0\} = \mathcal{L}((h,2,h)).$$
Sia $T = h-1$. Sappiamo che $V_{h-1} = \operatorname{Ker} f_{h-1}$, dove $f_{h-1} = f-(h-1)i$ e:
$$M(f_{h-1}) = M(f)-(h-1)I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2-h & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{riducendo}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2-h & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$
Quindi:
$$V_{h-1} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x+z=0,\ (2-h)y=0\} = \mathcal{L}((1,0,-1)).$$
Ciò vuol dire che per $h \neq 0,2$ una base di autovettori è $[(0,1,0),(h,2,h),(1,0,-1)]$.

Sia $h=0$. In tal caso gli autovalori sono $1,-1$, con $m_1=2$ e $m_{-1}=1$, e, quindi, f è semplice se e solo se $\dim V_1 = m_1 = 2$. Sia, perciò, $T=1$. Sappiamo che $V_1 = \operatorname{Ker} f_1$, con $f_1 = f-i$ e:
$$M(f_1) = M(f)-I = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{riducendo}} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$
Quindi, in questo caso, $\dim V_1 = 3-\rho(M(f_1)) = 3-2 = 1 < 2 = m_1$, per cui per $h=0$ l'endomorfismo f non è semplice e non è possibile, dunque, determinare in tal caso una base di autovettori per f.

Sia $h=2$. In tal caso gli autovalori sono $1,3$, con $m_1=2$ e $m_3=1$, e, quindi, f è semplice se e solo se $\dim V_1 = m_1 = 2$. Sia, perciò, $T=1$. Sappiamo che $V_1 = \operatorname{Ker} f_1$, con $f_1 = f-i$ e:
$$M(f_1) = M(f)-I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$
Quindi, in questo caso, $\dim V_1 = 3-\rho(M(f_1)) = 3-1 = 2 = m_1$, per cui per $h=2$ l'endomorfismo f è semplice e possiamo, dunque, determinare in tal caso una base di autovettori per f. Dalla matrice precedente vediamo che:
$$V_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x+z=0\} = \mathcal{L}((1,0,-1),(0,1,0)).$$
Sia $T=3$. Sappiamo che $V_3 = \operatorname{Ker} f_3$, dove $f_3 = f-(3)i$ e:
$$M(f_3) = M(f)-3I = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{riducendo}} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$
Quindi:
$$V_3 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid -x+z=0,\ -2y+2z=0\} = \mathcal{L}((1,1,1)).$$
Quindi, per $h=2$ una base di autovettori per f è data da $[(1,0,-1),(0,1,0),(1,1,1)]$.

2. Dalle assegnazioni otteniamo che:
$$M(g) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2-h & h & -2h \\ -1 & 1 & -h-1 \end{pmatrix},$$
per cui, essendo, $|M(g)| = -2h^2+4h$, abbiamo che per $h \neq 0,2$ l'endomorfismo g è un isomorfismo. Questo vuol dire che in tali casi g è iniettiva e suriettiva e, dunque, $\operatorname{Ker} g = \{(0,0,0)\}$ e $\operatorname{Im} g = \mathbb{R}^3$.

Sia $h=0$. In questo caso:
$$M(g) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{riducendo}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Questo vuol dire che $\dim \operatorname{Im} f = 2$ e che una sua base è data da $[(1,2,-1),(1,0,1)]$. Inoltre da:

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ x & y & z \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow x - y - z = 0$$

vediamo che:

$$\operatorname{Im} g = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - y - z = 0\}.$$

Inoltre, abbiamo $\dim \operatorname{Ker} f = 3 - 2 = 1$ e:

$$\operatorname{Ker} f = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y - z = 0,\ 2x = 0\} = \mathcal{L}((0,1,1)).$$

Sia $h = 2$. In questo caso:

$$M(g) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -4 \\ -1 & 1 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{riducendo}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Questo vuol dire che $\dim \operatorname{Im} f = 2$ e che una sua base è data da $[(1,0,-1),(1,2,1)]$. Inoltre da:

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ x & y & z \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow 2x - 2y + 2z = 0$$

vediamo che:

$$\operatorname{Im} g = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - y + z = 0\}.$$

Inoltre, abbiamo $\dim \operatorname{Ker} f = 3 - 2 = 1$ e:

$$\operatorname{Ker} f = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y - z = 0,\ 2y - 4z = 0\} = \mathcal{L}((-1,2,1)).$$

3. Per calcolare la controimmagine del vettore $(0,1,1)$ occorre risolvere il sistema la cui matrice completa associata è:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 2-h & h & -2h & 1 \\ -1 & 1 & -h-1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{riducendo, per } h\neq 0} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 2-2h & 0 & -h & 1 \\ 2h-4 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Quindi, per $h \neq 0, 2$ otteniamo:

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ (2-2h)x - hz = 1 \\ (2h-4)x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = -\dfrac{1}{h} \\ z = -\dfrac{1}{h}. \end{cases}$$

Quindi, per $h \neq 0, 2$ abbiamo:

$$g^{-1}(0,1,1) = \left\{ \left(0, -\frac{1}{h}, -\frac{1}{h}\right) \right\}.$$

La riduzione precedente per $h = 2$ ci porta al sistema:

$$\begin{cases} x + y - z = 0 \\ -2x - 2z = 1, \end{cases}$$

per cui abbiamo ∞^1 soluzioni e:

$$g^{-1}(0,1,1) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y - z = 0,\ -2x - 2z = 1\} = \left\{ \left(-z - \frac{1}{2}, 2z + \frac{1}{2}, z\right) \in \mathbb{R}^3 \right\}.$$

Per $h = 0$ abbiamo:
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{riducendo}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right).$$
Dunque, per $h = 0$ il sistema è impossibile e si ha $g^{-1}(0,1,1) = \emptyset$.

II

1. **5 punti.** È assegnato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}, u$. Date le rette:
$$r\colon \begin{cases} x + y + 2z - 1 = 0 \\ 3x - y - z + 2 = 0 \end{cases} \quad \text{e} \quad s\colon \begin{cases} x - z + 4 = 0 \\ y - 2z = 0, \end{cases}$$
determinare il piano π parallelo alle rette r e s e passante per $P = (0,1,0)$. Determinare la retta t ortogonale e incidente la retta s e passante per P.

2. **5 punti.** È assegnato nel piano un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $O, \vec{x}, \vec{y}, u$. Studiare il fascio di coniche di equazione:
$$x^2 - 2xy + hy^2 + 2x - 2hy = 0,$$
determinandone, in particolare, punti base e coniche spezzate.

3. **5 punti.** È assegnato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}, u$. Studiare le quadriche di equazione:
$$x^2 - 2hxy + 4y^2 + z^2 + 2z - 1 = 0,$$
al variare di $h \in \mathbb{R}$.

4. **ESERCIZIO BONUS: 5 punti.** Date le rette:
$$r\colon \begin{cases} x = 2 \\ z = 0 \end{cases} \quad \text{e} \quad s\colon \begin{cases} x + y = 2 \\ x - z = 0, \end{cases}$$
mostrare che r e s sono sghembe e determinare la retta t ortogonale e incidente entrambe le rette.

Soluzione

1. È facile vedere che le rette r e s hanno parametri direttori, rispettivamente, $(1,7,-4)$ e $(1,2,1)$. Quindi, se (a,b,c) sono le componenti di una vettore ortogonale al piano π, si ha:
$$\begin{cases} a + 7b - 4c = 0 \\ a + 2b + c = 0, \end{cases}$$
per cui possiamo dire che $(3,-1,-1)$ sono le componenti di un vettore ortogonale a π. Concludiamo, perciò, che:
$$\pi\colon 3x - (y-1) - z = 0 \Rightarrow \pi\colon 3x - y - z + 1 = 0.$$
Cerchiamo il piano α passante per P e ortogonale a s. È chiaro che $\alpha\colon x + 2y + z - 2 = 0$. Determiniamo il punto:
$$H = \alpha \cap s\colon \begin{cases} x + 2y + z - 2 = 0 \\ x - z + 4 = 0 \\ y - 2z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -3 \\ y = 2 \\ z = 1. \end{cases}$$
Quindi, $H = (-3,2,1)$ e si ha che $t = PH$:
$$t\colon \begin{cases} x + 3z = 0 \\ y - z - 1 = 0. \end{cases}$$

2. La conica nascosta del fascio ha equazione $y^2 - 2y = 0$, cioè $y(y-2) = 0$, per cui essa è una prima conica spezzata. Da:
$$B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & h & -h \\ 1 & -h & 0 \end{pmatrix}$$
vediamo che $|B| = h - h^2$, per cui le altre coniche spezzate del fascio si ottengono per $h = 0$ e $h = 1$ e hanno equazioni, rispettivamente, $x(x - 2y + 2) = 0$ e $(x - y)(x - y + 2) = 0$. Per determinare i punti base intersechiamo due coniche spezzate:
$$\begin{cases} y(y-2) = 0 \\ x(x - 2y + 2) = 0, \end{cases}$$
per cui essi sono i punti $(0, 0)$, $(0, 2)$, $(-2, 0)$ e $(2, 2)$. Inoltre, essendo $|A| = h - 1$, vediamo che per $h > 1$ abbiamo delle ellissi, tutte reali, in quanto i punti base sono reali, tra le quali non figurano circonferenze; per $h = 1$ non abbiamo una parabola ma una conica spezzata; per $h < 1$, $h \neq 0$, abbiamo delle iperboli, tra le quali una equilatera per $h = -1$.

3. Le matrici associate alle quadriche sono:
$$B = \begin{pmatrix} 1 & -h & 0 & 0 \\ -h & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & -h & 0 \\ -h & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$
Abbiamo $|B| = 2(h^2 - 4)$ e $|A| = 4 - h^2$. Quindi, per $h = \pm 2$ abbiamo $|B| = |A| = 0$ e, essendo in entrambi i casi facile verificare che $\rho(B) = 3$, concludiamo che per $h = \pm 2$ abbiamo due cilindri.

   Sia $h \neq \pm 2$. In tal caso, $|B|, |A| \neq 0$, per cui abbiamo ellissoidi o iperboloidi. Da:
$$P_A(T) = \begin{vmatrix} 1 - T & -h & 0 \\ -h & 4 - T & 0 \\ 0 & 0 & 1 - T \end{vmatrix} = (1 - T)(T^2 - 5T + 4 - h^2),$$
vediamo che gli autovalori di A sono concordi per $4 - h^2 > 0$, ovvero per $-2 < h < 2$ abbiamo degli ellissoidi, mentre per $h < -2$ e $h > 2$ abbiamo degli iperboloidi. Confrontando con il segno di $|B| = 2(h^2 - 4)$, vediamo che per $-2 < h < 2$ abbiamo degli ellissoidi reali, mentre per $h < -2$ e $h > 2$ abbiamo degli iperboloidi iperbolici.

4. È facile vedere che le rette r e s hanno parametri direttori, rispettivamente, $(0, 1, 0)$ e $(1, -1, 1)$, per cui esse non sono parallele. È anche facile verificare che non sono nemmeno incidenti, per cui possiamo concludere che esse sono sghembe.

   La retta t cercata passa per un punto di r e un punto di s. Il generico punto di r è $R = (2, a, 0)$, mentre il generico punto di $S = (b, 2 - b, b)$. Noi vogliamo che il vettore di $\vec{RS}$ sia ortogonale alle due rette r e s, dove il vettore $\vec{RS}$ ha componenti $(b - 2, 2 - a - b, b)$. Quindi, deve essere:
$$\begin{cases} 2 - a - b = 0 \\ a + 3b - 4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 1. \end{cases}$$
Quindi, $R = (2, 1, 0)$ e $S = (1, 1, 1)$. Dunque, abbiamo che $t = RS$ e si ha:
$$t = RS\colon \begin{cases} x + z - 2 = 0 \\ y = 1. \end{cases}$$