Corso di Laurea in Ingegneria Elettronica

Prova di **Algebra lineare e Geometria** - Appello 23 Febbraio 2023

Durata della prova: 3 ore.
È vietato uscire dall'aula prima di aver consegnato definitivamente il compito.
È vietato consultare libri o appunti.

Compito A

I

È assegnato $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tale che:

$$\begin{aligned} f(1,0,1) &= (h+1,0,h+1) \\ f(0,1,0) &= (1,2,1) \\ f(0,1,1) &= (2,1,h+1), \end{aligned}$$

al variare di $h \in \mathbb{R}$.

1. **5 punti.** Studiare f, determinando in ciascun caso $\operatorname{Im} f$ e $\operatorname{Ker} f$ e le loro equazioni cartesiane.
2. **5 punti.** Studiare la semplicità di f nei casi $h = 1$ e $h = -1$, determinando, se possibile, una base di autovettori per f.
3. **5 punti.** Dato $V = \mathcal{L}((1,-1,0),(-1,1,1))$, calcolare $f(V)$ al variare di $h \in \mathbb{R}$ e determinare il valore di $h \in \mathbb{R}$ per il quale $f(V) \subseteq V$. Dire se in tal caso $f(V)$ e V coincidono o meno.

Soluzione

1. Da:

$$\begin{cases} f(e_1) + f(e_3) = (h+1,0,h+1) \\ f(e_2) = (1,2,1) \\ f(e_2) + f(e_3) = (2,1,h+1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(e_1) = (h,1,1) \\ f(e_2) = (1,2,1) \\ f(e_3) = (1,-1,h) \end{cases}$$

segue che:

$$M(f) = \begin{pmatrix} h & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & h \end{pmatrix}.$$

Dal momento che $|M(f)| = 2(h^2-1)$, concludiamo che per $h \neq \pm 1$ f è un isomorfismo. Questo vuol dire che f è iniettiva e suriettiva, per cui $\operatorname{Ker} f = \{(0,0,0)\}$ e $\operatorname{Im} f = \mathbb{R}^3$.

Sia $h = 1$. In questo caso, abbiamo:

$$M(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{riducendo}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dunque, una base di $\dim \operatorname{Im} f = \rho(M(f)) = 2$ e una sua base è data da $[(1,1,1),(1,2,1)]$. Per quanto riguarda la sua equazione cartesiana, da:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ x & y & z \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow -x+z = 0$$

vediamo che:

$$\operatorname{Im} f = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - z = 0\}.$$

Inoltre, sappiamo che $\dim \operatorname{Ker} f = 3 - \dim \operatorname{Im} f = 1$ e:

$$\operatorname{Ker} f = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x+y+z=0,\ y-2z=0\} = \mathcal{L}((-3,2,1)).$$

Sia $h=-1$. In questo caso, abbiamo:

$$M(f) = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{riducendo}} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dunque, una base di $\dim \operatorname{Im} f = \rho(M(f)) = 2$ e una sua base è data da $[(-1,1,1),(1,2,1)]$. Per quanto riguarda la sua equazione cartesiana, da:

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ x & y & z \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow -x+2y-3z=0$$

vediamo che:

$$\operatorname{Im} f = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x-2y+3z=0\}.$$

Inoltre, sappiamo che $\dim \operatorname{Ker} f = 3 - \dim \operatorname{Im} f = 1$ e:

$$\operatorname{Ker} f = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid -x+y+z=0,\ 3y=0\} = \mathcal{L}((1,0,1)).$$

2. Sia $h=1$. In questo caso:

$$P(T) = \begin{vmatrix} 1-T & 1 & 1 \\ 1 & 2-T & -1 \\ 1 & 1 & 1-T \end{vmatrix} = -T(2-T)^2.$$

Quindi, gli autovalori sono 0 e 2, con $m_0 = 1$ e $m_2 = 2$. Sappiamo che $\dim V_0 = m_0 = 1$, mentre $1 \leq \dim V_2 \leq m_2 = 2$, per cui possiamo concludere che f è semplice per $h=1$ se $\dim V_2 = m_2 = 2$. Sia, dunque, $T=2$. Sappiamo che $V_2 = \operatorname{Ker} f_2$, dove $f_2 = f - 2i$ e:

$$M(f_2) = M(f) - 2I = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{riducendo}} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Quindi, $\rho(M(f_2)) = 2$ e $\dim V_2 = 3-2 = 1 < 2 = m_2$. Ciò vuol dire che per $h=1$ f non è semplice e non è possibile, in questo caso, determinare una base di autovettori per f.

Sia $h=-1$. In questo caso abbiamo:

$$P(T) = \begin{vmatrix} -1-T & 1 & 1 \\ 1 & 2-T & -1 \\ 1 & 1 & -1-T \end{vmatrix} = (2-T)T(T+2).$$

Quindi, gli autovalori sono 0, 2 e -2, tutti di molteplicità algebrica 1, per cui concludiamo subito che per $h=-1$ f è semplice ed è possibile, perciò, determinare una base di autovettori per f. Ricordiamo che $V_0 = \operatorname{Ker} f$, per cui, dal punto precedente segue che $V_0 = \mathcal{L}((1,0,1))$.

Sia $T=2$. Sappiamo che $V_2 = \operatorname{Ker} f_2$, dove $f_2 = f - 2i$ e:

$$M(f_2) = M(f) - 2I = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{riducendo}} \begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dunque:

$$V_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid -3x+y+z=0,\ x-z=0\} = \mathcal{L}((1,2,1)).$$

Sia $T=-2$. Sappiamo che $V_{-2}=\operatorname{Ker} f_{-2}$, dove $f_{-2}=f+2i$ e:

$$M(f_{-2})=M(f)+2I=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&4&-1\\1&1&1\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{riducendo}}\begin{pmatrix}1&1&1\\2&5&0\\0&0&0\end{pmatrix}.$$

Dunque:

$$V_{-2}=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x+y+z=0,\ 2x+5y=0\}=\mathcal{L}((-5,2,3)).$$

Quindi, per $h=-1$ una base di autovettori per f è $[(1,0,1),(1,2,1),(-5,2,3)]$.

3. Sappiamo che $f(V)=\mathcal{L}(f(1,-1,0),f(-1,1,1))$. Da:

$$M(f)\cdot\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}h&1&1\\1&2&-1\\1&1&h\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}h-1\\-1\\0\end{pmatrix}$$

e

$$M(f)\cdot\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}h&1&1\\1&2&-1\\1&1&h\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2-h\\0\\h\end{pmatrix}$$

vediamo che $f(V)=\mathcal{L}((h-1,1,0),(2-h,0,h))$. Da:

$$\begin{pmatrix}h-1&1&0\\2-h&0&h\end{pmatrix}$$

vediamo che $\dim f(V)=2$ per ogni $h\in\mathbb{R}$, per cui $[(h-1,1,0),(2-h,0,h)]$ è una base di $f(V)$ per ogni $h\in\mathbb{R}$. Inoltre, da:

$$\begin{vmatrix}1&-1&0\\-1&1&1\\x&y&z\end{vmatrix}=0\Leftrightarrow x-y=0,$$

segue che $V=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\mid x-y=0\}$. Dunque, $f(V)\subseteq V$ se e solo se $(h-1,1,0),(2-h,0,h)\in V$, ovvero verificano la sua equazione cartesiana. Chiaramente in entrambi i casi ciò avviene per $h=2$. In tal caso, inoltre, abbiamo $\dim f(V)=\dim V=2$, per cui possiamo dire che per $h=2$ si ha $f(V)=V$.

II

1. **5 punti.** È assegnato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $O,\vec{x},\vec{y},\vec{z},u$. Sono dati:

$$\alpha\colon x+z+1=0,\ \beta\colon 2x-y-z+3=0,\ P=(0,1,1)\quad\text{e}\quad s\colon\begin{cases}x-z=0\\y=1.\end{cases}$$

Determinare il piano π ortogonale ad α e β e passante per P e la distanza $d(s,\pi)$.

2. **5 punti.** È assegnato nel piano un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $O,\vec{x},\vec{y},u$. Studiare il fascio di coniche di equazione:

$$x^2-2hxy-hy^2+2x+2y=0,$$

determinando, in particolare, punti base e coniche spezzate.

3. **5 punti.** È assegnato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $O,\vec{x},\vec{y},\vec{z},u$. Studiare, al variare di $h\in\mathbb{R}$, le quadriche di equazione:

$$x^2-2hxy+y^2+4z^2+2z+1=0.$$

4. **ESERCIZIO BONUS: 5 punti.** È assegnato nel piano un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $O,\vec{x},\vec{y},u$. Determinare vertice e asse di simmetria della parabola di equazione:

$$x^2+2xy+y^2-2x=0.$$

Soluzione

1. I vettori di componenti $(1,0,1)$ e $(2,-1,-1)$ sono ortogonali, rispettivamente, ai piani α e β. Quindi, se (a,b,c) sono le componenti di un vettore ortogonale al piano π deve essere:

$$\begin{cases} a+c=0 \\ 2a-b-c=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b=3a \\ c=-a. \end{cases}$$

Quindi, possiamo prendere $(1,3,-1)$ come componenti di un vettore ortogonale a π e abbiamo:

$$\pi\colon\ x+3(y-1)-(z-1)=0 \Rightarrow \pi\colon\ x+3y-z-2=0.$$

Inoltre, osserviamo che la retta s ha parametri direttori $(1,0,1)$, il che implica che la retta s e il piano π sono paralleli. Dunque, preso un qualsiasi punto di s, per esempio $A=(0,1,0)$, abbiamo:

$$d(s,\pi)=d(A,\pi)=\frac{1}{\sqrt{11}}.$$

2. La conica nascosta del fascio ha equazione $y(2x+y)=0$. Inoltre:

$$B=\begin{pmatrix} 1 & -h & 1 \\ -h & -h & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

e $|B|=-h-1$. Questo vuol dire che per $h\neq -1$ le coniche sono irriducibili, mentre per $h=-1$ abbiamo la seguente conica spezzata:

$$x^2+2xy+y^2+2x+2y=0 \Rightarrow (x+y)(x+y+2)=0.$$

I punti base del fascio sono dati da:

$$\begin{cases} y(x+2y)=0 \\ (x+y)(x+y+2)=0, \end{cases}$$

per cui essi sono $(0,0)$ contato due volte e i punti $(-2,0)$ e $(2,-4)$. Inoltre, essendo:

$$|A|=\begin{vmatrix} 1 & -h \\ -h & -h \end{vmatrix}=-h-h^2,$$

concludiamo che per $-1<h<0$ abbiamo delle ellissi reali (in quanto i punti base sono reali), tra le quali non figurano circonferenze; per $h=0$ abbiamo una parabola, mentre per $h=-1$ abbiamo una conica spezzata; per $h<-1$ e $h>0$ abbiamo delle iperboli, tra le quali figura una equilatera per $h=1$.

3. Dato che:

$$B=\begin{pmatrix} 1 & -h & 0 & 0 \\ -h & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad A=\begin{pmatrix} 1 & -h & 0 \\ -h & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

e che $|B|=3(1-h^2)$ e $|A|=4(1-h^2)$, vediamo che per $h=\pm 1$ abbiamo dei cilindri, in quanto si verifica facilmente che in questi casi $\rho(B)=3$. Per $h\neq \pm 1$ abbiamo degli iperboloidi o degli ellissoidi. Da:

$$P_A(T)=\begin{vmatrix} 1-T & -h & 0 \\ -h & 1-T & 0 \\ 0 & 0 & 4-T \end{vmatrix}=(4-T)(T^2-2T+1-h^2)$$

vediamo che gli autovalori di A sono tutti dello stesso segno per $1-h^2>0$. Quindi, per $1-h^2>0$, ovvero $-1<h<1$ abbiamo degli ellissoidi che sono immaginari in quanto in tal caso si ha $|B|>0$. Per $h<-1$ e $h>1$ abbiamo degli iperboloidi ellittici, in quanto in tal caso si ha $|B|<0$.

4. La conica data ha matrici associate:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

per cui $|B| \neq 0$ e $|A| = 0$. Quindi, effettivamente la conica data è una parabola. Determiniamo il suo punto improprio:

$$\begin{cases} x^2 + 2xy + y^2 - 2xt = 0 \\ t = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (x+y)^2 = 0 \\ t = 0. \end{cases}$$

Quindi, $P_\infty = (1, -1, 0)$ è il punto improprio della parabola. Questo vuol dire che $(1, -1)$ sono le componenti di un vettore parallelo all'asse di simmetria. Quindi, le rette ortogonali all'asse hanno equazione del tipo $x - y + k = 0$. Dunque:

$$\begin{cases} x^2 + 2xy + y^2 - 2x = 0 \\ x - y + k = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = x + k \\ x^2 + 2x(x+k) + (x+k)^2 - 2x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4x^2 + (4k-2)x + k^2 = 0 \\ y = x + k. \end{cases}$$

La retta $x - y + k = 0$ tangente alla parabola se:

$$\frac{\Delta}{4} = 0 \Leftrightarrow -4k + 1 = 0 \Leftrightarrow k = \frac{1}{4}.$$

Quindi, la retta $x - y + \frac{1}{4} = 0$ è tangente alla parabola nel vertice:

$$\begin{cases} 4x^2 - x + \dfrac{1}{16} = 0 \\ y = x + \dfrac{1}{4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{1}{8} \\ y = \dfrac{3}{8}. \end{cases}$$

Quindi, il vertice della parabola è $V = (\frac{1}{8}, \frac{3}{8})$ e l'asse di simmetria è la retta VP_∞:

$$y - \frac{3}{8} = -\left(x - \frac{1}{8}\right) \Rightarrow 2x + 2y - 1 = 0.$$