Corso di Laurea in Ingegneria Elettronica

Prova di **Algebra lineare e Geometria-** Appello 23 Gennaio 2023

Durata della prova: 3 ore.
È vietato uscire dall'aula prima di aver consegnato definitivamente il compito.
È vietato consultare libri o appunti. Compito A

I

1. **5 punti.** Sia $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'endomorfismo definito dalle assegnazioni:

$$\begin{aligned} f(1,0,1) &= (0,1,-1-h) \\ f(1,1,0) &= (h,h,h) \\ f(0,0,1) &= (0,0,h-1), \end{aligned}$$

al variare di $h \in \mathbb{R}$. Studiare la semplicità di f al variare di $h \in \mathbb{R}$, determinando, ove possibile, una base di autovettori per f.

2. **5 punti.** Sia $g\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'endomorfismo definito da:

$$g(x,y,z) = (-x-y+hz, x+2y+z, x+hy+z),$$

al variare di $h \in \mathbb{R}$. Studiare l'endomorfismo g, determinando in ciascun caso $\operatorname{Im} f$ e $\operatorname{Ker} f$ e le loro equazioni cartesiane.

3. **5 punti.** Dato l'endomorfismo g del punto precedente, determinare, al variare di $h \in \mathbb{R}$, $g^{-1}(0,1,1)$.

4. **ESERCIZIO BONUS: 5 punti.** Sono dati i vettori $v_1 = (1,0,1,0)$, $v_2 = (0,1,0,0)$, $v_3 = (0,0,2,1) \in \mathbb{R}^4$ e lo spazio $V = \mathcal{L}(v_1, v_2, v_3)$. Determinare l'endomorfismo $\varphi\colon V \to V$ tale che:

- $v_1 \in V_{-1}$
- $v_2 \in \operatorname{Ker} \varphi$
- $\varphi(v_3) = (1,1,-1,-1)$.

Determinare l'endomorfismo $\psi\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ tale che la restrizione $\psi|_V$ induce φ e per il quale si ha $\psi(0,0,0,1) =\ (0,0,0,1)$.

Soluzione

1. Dalle assegnazioni è immediato vedere che:

$$M(f) = \begin{pmatrix} 0 & h & 0 \\ 1 & h-1 & 0 \\ -2h & 3h & h-1 \end{pmatrix},$$

per cui:

$$P(T) = \begin{vmatrix} -T & h & 0 \\ 1 & h-1-T & 0 \\ -2h & 3h & h-1-T \end{vmatrix} = (h-1-T)[T^2-(h-1)T-h],$$

per cui gli autovalori sono $h-1, h, -1$. Essi sono tutti distinti di molteplicità algebrica 1 per $h \neq 0, -1$. Questo vuol dire che per $h \neq 0, -1$ l'endomorfismo è sicuramente semplice ed è possibile determinare una base di autovettori.

Sia, dunque, $h \neq 0, -1$. In tal caso, dato che $m_h = m_{h-1} = m_{-1} = 1$, possiamo dire che tutti gli autospazi hanno dimensione 1. Osservato poi, che, sapendo che $f(0,0,1) = (0,0,h-1)$, possiamo dire che $(0,0,1) \in V_{h-1}$ e, dovendo essere $\dim V_{h-1} = 1$, concludiamo immediatamente che $V_{h-1} = \mathcal{L}((0,0,1))$.

Sia $T = h$. In tal caso, sappiamo che $V_h = \operatorname{Ker} f_h$, dove $f_h = f - hi$ e:

$$M(f_h) = M(f) - hI = \begin{pmatrix} -h & h & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ -2h & 3h & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{riducendo, dato che } h \neq 0} \begin{pmatrix} -h & h & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & h & -1 \end{pmatrix},$$

per cui:

$$V_h = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid -hx + hy = 0,\, hy - z = 0\} = \mathcal{L}((1,1,h)).$$

Sia $T = -1$. Sappiamo che $f_{-1} = f + i$ e:

$$M(f_{-1}) = M(f) + I = \begin{pmatrix} 1 & h & 0 \\ 1 & h & 0 \\ -2h & 3h & h \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{riducendo}} \begin{pmatrix} 1 & h & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2h^2 + 3h & h \end{pmatrix},$$

per cui, ricordando che $h \neq 0$, abbiamo:

$$V_{-1} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + hy = 0,\, (2h^2 + 3h)y + hz = 0\} = \mathcal{L}((-h, 1, -2h-3)).$$

Quindi, per $h \neq 0, -1$ una base di autovettori è data da $[(0,0,1), (1,1,h), (-h,1,-2h-3)]$.

Sia $h = 0$. In tal caso gli autovalori sono 0 e -1, con $m_0 = 1$ e $m_{-1} = 2$, per cui possiamo dire che in questo caso f è semplice se e solo se $\dim V_{-1} = m_{-1} = 2$.

Sia, dunque, $T = -1$. Sappiamo che $V_{-1} = \operatorname{Ker} f_{-1}$, dove $f_{-1} = f + i$ e:

$$M(f_{-1}) = M(f) + I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

È evidente che $\dim V_{-1} = 2$, per cui anche per $h = -1$ l'endomorfismo è semplice e possiamo determinare una base di autovettori. Dalla matrice precedente vediamo che:

$$V_{-1} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = 0\} = \mathcal{L}((0,1,0),(0,0,1)).$$

Sia $T = 0$. Sappiamo che $V_0 = \operatorname{Ker} f$:

$$M(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

per cui:

$$V_0 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - y = 0,\, z = 0\} = \mathcal{L}((1,1,0)).$$

Quindi, per $h = 0$ una base di autovettori è $[(0,1,0),(0,0,1),(1,1,0)]$.

Infine, sia $h = -1$. In questo caso gli autovalori sono -2 e -1, con $m_{-1} = 2$ e $m_{-2} = 1$. Questo significa che f è semplice se e solo se $\dim V_{-1} = m_{-1} = 2$.

Sia, dunque, $T = -1$. Sappiamo che $V_{-1} = \operatorname{Ker} f_{-1}$, dove $f_{-1} = f + i$ e:

$$M(f_{-1}) = M(f) + I = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & -3 & -1 \end{pmatrix}.$$

Quindi, in questo caso si ha $\dim V_{-1} = 1 < 2 = m_{-1}$, per cui per $h = -1$ l'endomorfismo non è semplice e non possiamo determinare in questo caso una base di autovettori.

2. È chiaro che:
$$M(g) = \begin{pmatrix} -1 & -1 & h \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & h & 1 \end{pmatrix},$$
per cui, essendo $|M(g)| = h^2-h-2$, possiamo dire che per $h \neq 2, -1$ l'endomorfismo g è un isomorfismo. Questo vuol dire che g è iniettiva e suriettiva, per cui $\operatorname{Ker} g = \{(0,0,0)\}$ e $\operatorname{Im} g = \mathbb{R}^3$.

Sia $h = -1$. In questo caso:
$$M(g) = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{riducendo}} \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$
Quindi, $\dim \operatorname{Im} g = \rho(M(g)) = 2$ e una sua base è data da $[(-1,1,1), (-1,2,-1)]$. Inoltre, da:
$$\begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ x & y & z \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow -3x-2y-z = 0$$
vediamo che:
$$\operatorname{Im} g = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 3x+2y+z = 0\}.$$
Inoltre, $\dim \operatorname{Ker} g = \dim \mathbb{R}^3 - \dim \operatorname{Im} g = 1$ e:
$$\operatorname{Ker} g = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid -x-y-z = 0,\ y = 0\} = \mathcal{L}((1,0,-1)).$$

Sia $h = 2$. In questo caso:
$$M(g) = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{riducendo}} \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$
Quindi, $\dim \operatorname{Im} g = \rho(M(g)) = 2$ e una sua base è data da $[(-1,1,1), (-1,2,2)]$. Inoltre, da:
$$\begin{vmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \\ x & y & z \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow y - z = 0$$
vediamo che:
$$\operatorname{Im} g = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid y-z = 0\}.$$
Inoltre, $\dim \operatorname{Ker} g = \dim \mathbb{R}^3 - \dim \operatorname{Im} g = 1$ e:
$$\operatorname{Ker} g = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid -x-y+2z = 0,\ y+3z = 0\} = \mathcal{L}((5,-3,1)).$$

3. Per calcolare la controimmagine del vettore occorre risolvere il sistema la cui matrice completa associata è:
$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & h & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & h & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{riducendo, per } h\neq -1} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & h & 0 \\ 0 & 1 & h+1 & 1 \\ 0 & h-2 & 0 & 0 \end{array}\right).$$
Quindi, per $h \neq 2, -1$ abbiamo una sola soluzione:
$$\begin{cases} -x-y+hz = 0 \\ y+(h+1)z = 1 \\ (h-2)y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{h}{h+1} \\ y = 0 \\ z = \dfrac{1}{h+1}. \end{cases}$$

Quindi, per $h \neq 2, -1$ abbiamo:

$$g^{-1}(0,1,1) = \left\{ \left(\frac{h}{h+1}, 0, \frac{1}{h+1} \right) \right\}.$$

Sia $h = 2$. In tal caso, la matrice precedente diventa:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right),$$

per cui il sistema ha ∞^1 soluzioni e abbiamo:

$$g^{-1}(0,1,1) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid -x-y+2z=0,\ y+3z=1\} = \{(5z-1, -3z+1, z) \in \mathbb{R}^3\}.$$

Sia $h = -1$. In questo caso abbiamo:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{\text{riducendo}} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{array} \right).$$

Quindi, il sistema è impossibile, per cui in questo caso $g^{-1}(0,1,1) = \emptyset$.

4. Dalle condizioni date si evince che:

$$\begin{aligned} \varphi(v_1) &= -v_1 \\ \varphi(v_2) &= (0,0,0,0) \\ \varphi(v_3) &= (1,1,-1,-1). \end{aligned}$$

Queste condizioni determinano ϕ in quanto v_1, v_2, v_3, come si può facilmente verificare, sono linearmente indipendenti e costituiscono, perciò, una base di V. Inoltre, se la restrizione di ψ a V induce φ, dalle condizioni date abbiamo:

$$\begin{aligned} \psi(v_1) &= \varphi(v_1) = -v_1 \\ \psi(v_2) &= \varphi(v_2) = (0,0,0,0) \\ \psi(v_3) &= \varphi(v_3) = (1,1,-1,-1) \\ \psi(0,0,0,1) &= (0,0,0,1). \end{aligned}$$

Anche queste condizioni assegnano perfettamente l'endomorfismo cercato in quanto, $v_1, v_2, v_3, (0,0,0,1)$ sono linearmente indipendenti, come si vede facilmente, ed essi individuano, dunque, una base di $\mathbb{R}^4$.

II

1. **5 punti.** È assegnato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}, u$. Dati la retta:

$$r\colon \begin{cases} x - y - z + 2 = 0 \\ 3x + y + 2z - 2 = 0 \end{cases}$$

e il piano $\pi\colon x+y+z=0$, determinare il piano α parallelo alla retta r, ortogonale al piano π e passante per O. Mostrare che la retta r e l'asse $\vec{y}$ sono complanari e determinare il piano che le contiene.

2. **5 punti.** È assegnato nel piano un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $O, \vec{x}, \vec{y}, u$. Determinare e studiare il fascio di coniche passanti per i punti $A = (-1,2)$, $B = (0,2)$, $C = (2,0)$ e per l'origine $O = (0,0)$. Determinare il centro di simmetria dell'iperbole equilatera del fascio.

3. **5 punti.** È assegnato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}, u$. Data la conica:

$$\Gamma\colon \begin{cases} 2x^2 - y^2 = -1 \\ z = 0, \end{cases}$$

determinare e studiare le quadriche contenenti Γ e i punti $A = (0,1,1)$, $B = (0,-1,1)$ e $C = (1,1,1)$.

Soluzione

1. È facile vedere che parametri direttori delle retta r sono $(-1,-5,4)$, per cui queste sono le componenti di un vettore $\vec{v}$ parallelo a r. Inoltre, è evidente che $(1,1,1)$ sono le componenti di un vettore $\vec{n}_1$ ortogonale al piano π. Quindi, se (a,b,c) sono le componenti di un vettore $\vec{n}_2$ ortogonale al piano α, il vettore $\vec{n}_2$ è ortogonale sia a $\vec{v}$ che a $\vec{n}_1$, per cui abbiamo:

$$\begin{cases} -a-5b+4c=0 \\ a+b+c=0. \end{cases}$$

Quindi, possiamo dire che componenti del vettore $\vec{n}_2$ sono $(9,-5,-4)$ e abbiamo che:

$$\alpha\colon 9x-5y-4z=0.$$

Osservato che $\vec{y}\colon x=z=0$, è evidente che la retta r e l'asse $\vec{y}$ sono complanari in quanto incidenti:

$$r\cap\vec{y}\colon \begin{cases} x-y-z+2=0 \\ 3x+y+2z-2=0 \\ x=0 \\ z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=2 \\ z=0. \end{cases}$$

Per determinare il piano che le contiene consideriamo il fascio di piani individuato dalla retta r:

$$\lambda(x-y-z+2)+\mu(3x+y+2z-2)=0$$

e imponiamo il passaggio per un punto dell'asse $\vec{y}$ distinto da $(0,2,0)$. Possiamo, per esempio, imporre il passaggio per l'origine $O=(0,0,0)$. Così facendo abbiamo:

$$2\lambda-2\mu=0 \Rightarrow \lambda=\mu.$$

Prendendo $\lambda=1$ e $\mu=1$, vediamo che il piano contenente le due rette è quello di equazione $4x+z=0$.

2. Le coniche spezzate del fascio sono $AB\cup CO\colon y(y-2)=0$, $AC\cup BO\colon x(2x+3y-4)=0$ e $AO\cup BC\colon (2x+y)(x+y-2)=0$. Quindi, possiamo dire che il fascio di coniche cercato ha equazione:

$$hy(y-2)+x(2x+3y-4)=0 \Rightarrow 2x^2+3xy+hy^2-4x-2hy=0.$$

Quindi:

$$B=\begin{pmatrix} 2 & \frac{3}{2} & -2 \\ \frac{3}{2} & h & -h \\ -2 & -h & 0 \end{pmatrix}$$

e, dato che $|B|=-2h^2+2h$, vediamo che per $h=0$ e $h=1$ abbiamo coniche spezzate, ovvero, rispettivamente, quelle di equazione $x(2x+3y-4)=0$ e $(2x+y)(x+y-2)=0$, mentre per $h\neq 0,1$ le coniche sono irriducibili. Inoltre:

$$|A|=\begin{vmatrix} 2 & \frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} & h \end{vmatrix}=2h-\frac{9}{4},$$

per cui per $h>\frac{9}{8}$ abbiamo delle ellissi, tutte reali, in quanto i punti base sono reali, e nessuna delle quali è una circonferenza; per $h=\frac{9}{8}$ abbiamo una parabola; per $h<\frac{9}{8}$, $h\neq 0,1$, abbiamo delle iperboli, tra le quali figura una equilatera per $h=-2$, in quanto $\mathrm{Tr}(A)=h+2$.

La matrice associata all'iperbole equilatera de fascio è:

$$B=\begin{pmatrix} 2 & \frac{3}{2} & -2 \\ \frac{3}{2} & -2 & 2 \\ -2 & 2 & 0 \end{pmatrix},$$

per cui il suo centro di simmetria si ottiene dal sistema:

$$\begin{cases} 2x + \dfrac{3}{2}y - 2 = 0 \\ \dfrac{3}{2}x - 2y + 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{4}{25} \\ y = \dfrac{28}{25}. \end{cases}$$

Dunque, il centro di simmetria è il punto $(\frac{4}{25}, \frac{28}{25})$.

3. Le quadriche contenenti l'iperbole Γ hanno equazione:

$$2x^2 - y^2 + 1 + z(ax + by + cz + d) = 0$$

Quando imponiamo il passaggio per i punti dati, otteniamo il sistema:

$$\begin{cases} b + c + d = 0 \\ -b + c + d = 0 \\ a + b + c + d + 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -2 \\ b = 0 \\ d = -c. \end{cases}$$

Quindi, le quadriche cercate hanno equazione:

$$2x^2 - y^2 - 2xz + cz^2 - cz + 1 = 0.$$

Le matrici associate sono:

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & c & -\dfrac{c}{2} \\ 0 & 0 & -\dfrac{c}{2} & 1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & c \end{pmatrix}.$$

Dunque, $|B| = \frac{c^2-4c+2}{2}$ e $|A| = -2c + 1$. Osservato che le quadriche contengono Γ, che è un'iperbole, concludiamo che tra queste non figurano né ellissi né paraboloidi ellittici. Quindi, per $c = \frac{1}{2}$ abbiamo necessariamente un paraboloide iperbolico e per $c = 2 \pm \sqrt{2}$ abbiamo due coni. Inoltre, per $c < 2 - \sqrt{2}$, $c \neq \frac{1}{2}$, e $c > 2 + \sqrt{2}$ abbiamo degli iperboloidi iperbolici, e per $2 - \sqrt{2} < c < 2 + \sqrt{2}$ abbiamo degli iperboloidi ellittici.