Corso di Laurea in Ingegneria Elettronica

Prova di **Algebra lineare e Geometria** - Appello 21 Luglio 2023

Durata della prova: 3 ore.
È vietato uscire dall'aula prima di aver consegnato definitivamente il compito.
È vietato consultare libri o appunti.

I

È assegnato $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tale che:

$$f(x,y,z) = ((h+1)x + y + z, -x + y + hz, x + y + z), \quad \forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3,$$

al variare di $h \in \mathbb{R}$.

1. **5 punti.** Studiare f, determinando in ciascun caso $\operatorname{Im} f$ e $\operatorname{Ker} f$ e le loro equazioni cartesiane.
2. **5 punti.** È data l'applicazione $g\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definita da:

$$\begin{aligned} g(1,1,1) &= (-1,-1,-1) \\ g(0,1,1) &= (0,0,h) \\ g(0,0,1) &= (0,1,1), \end{aligned}$$

   al variare di $h \in \mathbb{R}$. Studiare la semplicità di g nei casi $h = 0$ e $h = 1$, determinando, se possibile, una base di autovettori per g.
3. **5 punti.** È assegnata l'applicazione f del punto 1. Dati $V = \mathscr{L}((1,-2,3),(2,1,1))$ e $W = \mathscr{L}((0,1,1),(-1,1,1))$, calcolare $f^{-1}(V)$ al variare di $h \in \mathbb{R}$ e determinare il valore di $h \in \mathbb{R}$ per il quale $f^{-1}(V) = W$.
4. **ESERCIZIO BONUS: 5 punti.** Sono dati i vettori $u_1 = (1,0,1,0)$, $u_2 = (0,1,1,0)$, $u_3 = (0,0,0,1) \in \mathbb{R}^4$ e $v_1 = (1,1,1)$, $v_2 = (1,1,0)$ e $v_3 = (1,0,1) \in \mathbb{R}^3$ e il sottospazio $U \subset \mathbb{R}^4$ avente base $\mathscr{A} = [u_1, u_2, u_3]$. Data l'applicazione lineare $\varphi\colon U \to \mathbb{R}^3$ tale che:

$$M^{\mathscr{A},\mathscr{B}}(\varphi) = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ h & -1 & 1 \\ 1 & 1 & h \end{pmatrix},$$

   dove $\mathscr{B} = [v_1, v_2, v_3]$, calcolare $\varphi^{-1}(2,3,1)$ al variare di $h \in \mathbb{R}$.

Soluzione

1. Si vede immediatamente che:

$$M(f) = \begin{pmatrix} h+1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & h \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

   Dato che $|M(f)| = h - h^2$, concludiamo che per $h \neq 0,1$ f è un isomorfismo, cioè f è iniettiva e suriettiva, per cui $\operatorname{Ker} f = \{(0,0,0)\}$ e $\operatorname{Im} f = \mathbb{R}^3$.

   Sia $h = 0$. In tal caso abbiamo:

$$M(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{riducendo}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Quindi, $\dim \operatorname{Im} f = \rho(M(f)) = 2$ e un sua base è $[(1,-1,1),(1,0,1)]$. Da:

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ x & y & z \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow -x+z=0$$

otteniamo:

$$\operatorname{Im} f = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid -x+z=0\}.$$

Inoltre, sappiamo che $\dim \operatorname{Ker} f = 3 - \dim \operatorname{Im} f = 1$ e:

$$\operatorname{Ker} f = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x+y+z=0,\ -x+y=0\} = \mathscr{L}((1,1,-2)).$$

Sia $h=1$. In tal caso abbiamo:

$$M(f) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{riducendo}} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Quindi, $\dim \operatorname{Im} f = \rho(M(f)) = 2$ e un sua base è $[(2,-1,1),(1,1,1)]$. Da:

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow -2x-y+3z=0$$

otteniamo:

$$\operatorname{Im} f = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid -2x-y+3z=0\}.$$

Inoltre, sappiamo che $\dim \operatorname{Ker} f = 3 - \dim \operatorname{Im} f = 1$ e:

$$\operatorname{Ker} f = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x+y+z=0,\ -x=0\} = \mathscr{L}((0,1,-1)).$$

2. È facile vedere che $\mathscr{C} = [(1,1,1),(0,1,1),(0,0,1)]$ è una base di $\mathbb{R}^3$ e che:

$$M^{\mathscr{C}}(g) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & h & 0 \end{pmatrix}.$$

Quindi:

$$P(T) = \begin{vmatrix} -1-T & 0 & 0 \\ 0 & -T & 1 \\ 0 & h & -T \end{vmatrix} = (-1-T)(T^2-h).$$

Sia $h=0$. In questo caso, vediamo che gli autovalori sono 0 e -1, con $m_{-1}=1$ e $m_0=2$. Quindi, sappiamo che necessariamente deve essere $\dim V_{-1} = m_{-1} = 1$ e che, invece, $1 \leq \dim V_0 \leq m_0 = 2$. Questo vuol dire che, in questo caso, g è semplice se $\dim V_0 = m_0 = 2$.

Sia, perciò, $T=0$. Sappiamo che $V_0 = \operatorname{Ker} g$. Da:

$$M^{\mathscr{C}}(g) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

vediamo che $\dim V_0 = \dim \operatorname{Ker} g = 3 - \rho(M^{\mathscr{C}}(g)) = 3-2 = 1 < 2 = m_0$. Quindi, possiamo dire che per $h=0$ g non è semplice e, perciò, non è possibile determinare una base di autovettori.

Sia $h=1$. In questo caso abbiamo:

$$P(T) = (-1-T)(T^2-1) = (-1-T)^2(1-T).$$

Quindi, in questo caso gli autovalori sono -1 e 1, con $m_{-1} = 2$ e $m_1 = 1$. Sappiamo che necessariamente $\dim V_1 = m_1 = 1$ e che, invece, $1 \le \dim V_{-1} \le 2 = m_{-1}$. Questo vuol dire che in questo caso g è semplice se $\dim V_{-1} = m_{-1} = 2$.

Sia $T = -1$. Sappiamo che $V_{-1} = \operatorname{Ker} g_{-1}$, dove $g_{-1} = g + i$ e:

$$M^{\mathscr{C}}(g_{-1}) = M^{\mathscr{C}}(g) + I = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

È, dunque, evidente che $\rho(M^{\mathscr{C}}(g_{-1})) = 1$ e, perciò, $\dim V_{-1} = 3 - 1 = 2 = m_{-1}$. Quindi, per $h = 1$ l'endomorfismo g è semplice e possiamo determinare una base di autovettori. Dalla matrice precedente vediamo che:

$$\begin{aligned} V_{-1} = \{v \in \mathbb{R}^3 \mid [v]_{\mathscr{C}} = (a, b, c),\, b + c = 0\} = \{v \in \mathbb{R}^3 \mid [v]_{\mathscr{C}} = (a, b, -b)\} = \\ = \mathscr{L}((1,1,1), (0,1,1) - (0,0,1)) = \mathscr{L}((1,1,1), (0,1,0)). \end{aligned}$$

Sia $T = 1$. Sappiamo che $V_1 = \operatorname{Ker} g_1$, dove $g_1 = g - i$ e:

$$M^{\mathscr{C}}(g_1) = M^{\mathscr{C}}(g) - I = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{riducendo}} \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dunque:

$$\begin{aligned} V_1 = \{v \in \mathbb{R}^3 \mid [v]_{\mathscr{C}} = (a, b, c),\, -2a = 0,\, -b + c = 0\} = \{v \in \mathbb{R}^3 \mid [v]_{\mathscr{C}} = (0, b, b)\} = \\ = \mathscr{L}((0,1,1) + (0,0,1)) = \mathscr{L}((0,1,2)). \end{aligned}$$

Quindi, per $h = 1$ una base di autovettori è $[(1,1,1), (0,1,0), (0,1,2)]$.

3. Da:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ x & y & z \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{riducendo}} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 5 & -5 \\ 0 & -x + y + z & 0 \end{pmatrix}$$

vediamo che:

$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid -x + y + z = 0\}.$$

Quindi:

$$f^{-1}(V) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid f(x, y, z) \in V\} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid -(h+1)x + y + hz = 0\}.$$

È chiaro che $\dim f^{-1}(V) = 2$ per ogni $h \in \mathbb{R}$ ed è anche facile vedere che $\dim W = 2$. Quindi, possiamo dire che $f^{-1}(V) = W$ se $W \subseteq f^{-1}(V)$, ovvero se $(0,1,1), (-1,1,1) \in f^{-1}(V)$:

$$(0,1,1) \in f^{-1}(V) \Rightarrow 1 + h = 0 \Rightarrow h = -1$$

e

$$(-1,1,1) \in f^{-1}(V) \Rightarrow h + 1 + 1 + h = 0 \Rightarrow h = -1.$$

Quindi, è chiaro che $f^{-1}(V) = W$ per $h = -1$.

4. Dobbiamo calcolare $[(2,3,1)]_{\mathscr{B}}$:

$$(2,3,1) = av_1 + bv_2 + cv_3 = a(1,1,1) + b(1,1,0) + c(1,0,1) = (a + b + c, a + b, a + c)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a + b + c = 2 \\ a + b = 3 \\ a + c = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 1 \\ c = -1. \end{cases}$$

Quindi, $[(2,3,1)]_{\mathscr{B}} = (2,1,-1)$ e dobbiamo risolvere il sistema la cui matrice completa associata è:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 2 \\ h & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & h & -1 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{riducendo, per } h\neq 1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 2 \\ h-1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2h+2 & 0 & -2h-2 \end{array}\right).$$

Quindi, per $h \neq 1,-1$ il sistema ha certamente una sola soluzione:

$$\begin{cases} a-2b+c=2 \\ (h-1)a+b=-1 \\ (2h+2)b=-2h-2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=0 \\ b=-1 \\ c=0. \end{cases}$$

Questo vuol dire che, per $h \neq 1,-1$, abbiamo:

$$\varphi^{-1}(2,3,1) = \{-u_2\} = \{(0,-1,-1,0)\}.$$

Sia $h=-1$. Dalla riduzione precedente vediamo che il sistema ammette ∞^1 soluzioni:

$$\begin{cases} a-2b+c=1 \\ -2a+b=-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b=2a-1 \\ c=3a. \end{cases}$$

Quindi, in tal caso:

$$\varphi^{-1}(2,3,1) = \{au_1+(2a-1)u_2+3au_3 \in \mathbb{R}^4\} = \{(a,2a-1,3a-1,3a) \in \mathbb{R}^4\}.$$

Sia $h=1$. In tal caso, abbiamo:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{riducendo}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Quindi:

$$\begin{cases} a-2b+c=2 \\ b=-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b=-1 \\ c=-a, \end{cases}$$

per cui:

$$\varphi^{-1}(2,3,1) = \{au_1-u_2-au_3 \in \mathbb{R}^4\} = \{(a,-1,a-1,-a) \in \mathbb{R}^4\}.$$

II

1. **5 punti.** È assegnato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $O,\vec{x},\vec{y},\vec{z},u$. Sono dati il piano $\pi\colon\ x+y=2$, le rette:
$$r\colon \begin{cases} x-2y+z=1 \\ 2x+y+z=-1 \end{cases} \quad \text{e} \quad s\colon \begin{cases} x+3y=-2 \\ z=0 \end{cases}$$
e il punto $P=(2,1,-2)$.
   - Determinare il piano α parallelo alla retta r, ortogonale al piano π e passante per P.
   - Mostrare che le rette r e s sono complanari e determinare il piano che le contiene.

2. **5 punti.** È assegnato nel piano un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $O,\vec{x},\vec{y},u$. Studiare il fascio di coniche di equazione:
$$hx^2+hxy+y^2-2y+1=0.$$

3. **5 punti.** È assegnato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $O,\vec{x},\vec{y},\vec{z},u$. Studiare al variare di $h \in \mathbb{R}$ le quadriche di equazione:
$$hx^2-2xy-y^2+hz^2-2z=0.$$

Soluzione

1. È facile vedere che $(-3,1,5)$ sono parametri direttori della retta r, mentre $(1,1,0)$ sono componenti di un vettore ortogonale al piano π. Questo significa che, se (a,b,c) sono le componenti di un vettore ortogonale al piano α, allora si ha:
$$\begin{cases} -3a+b+5c=0 \\ a+b=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b=-a \\ c=\dfrac{4}{5}a. \end{cases}$$
Possiamo, perciò, dire che $(5,-5,4)$ sono le componenti di un vettore ortogonale al piano α ed è semplice concludere che:
$$\alpha\colon 5x-5y+4z+3=0.$$
Da:
$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$$
concludiamo che r e s sono complanari. Per determinare il piano che contiene le due rette, consideriamo il fascio di piani contenenti r:
$$\lambda(x-2y+z-1)+\mu(2x+y+z+1)=0$$
e imponiamo il passaggio per un punto di s, per esempio $S=(-2,0,0)$. Sostituendo, troviamo:
$$-3\lambda-3\mu=0,$$
per cui, prendendo $\lambda=-1$ e $\mu=1$ troviamo che il piano che contiene entrambe le rette ha equazione $x+3y+2=0$.

2. Cominciamo ossevando che la conica nascosta del fascio ha equazione $x^2+xy=0$, per cui essa è una conica spezzata, $x(x+y)=0$. Da:
$$B=\begin{pmatrix} h & \dfrac{h}{2} & 0 \\ \dfrac{h}{2} & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$
vediamo che $|B|=-\frac{h^2}{4}$, per cui per $h=0$ otteniamo l'altra conica spezzata dal fascio, che ha equazione:
$$y^2-2y+1=0 \Rightarrow (y-1)^2=0.$$
I punti base del fascio si ottengono da:
$$\begin{cases} x(x+y)=0 \\ (y-1)^2=0, \end{cases}$$
per cui essi sono i punti di coordinate $(0,1)$ e $(-1,1)$, ciascuno contato due volte nel computo dei punti base. Inoltre, abbiamo:
$$\begin{vmatrix} h & \dfrac{h}{2} \\ \dfrac{h}{2} & 1 \end{vmatrix} = \frac{4h-h^2}{4},$$
per cui per $0<h<4$ abbiamo delle ellissi, tutte reali in quanto i punti base sono reali; non vi sono circonferenze nel fascio; per $h=4$ abbiamo una parabola, mentre ricordiamo che per $h=0$ abbiamo una conica spezzata; per $h<0$ e $h>4$ abbiamo delle iperboli; per $h=-1$ abbiamo un'iperbole equilatera.

3. Le matrici associate sono:
$$B=\begin{pmatrix} h & -1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & h & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad A=\begin{pmatrix} h & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Da $|B| = h+1$ e $|A| = -h^2 - h$ vediamo che per $h = 0$ abbiamo un paraboloide iperbolico. Per $h = -1$ abbiamo $|B| = |A| = 0$ e $\rho(B) = 3$, per cui abbiamo in questo caso un cilindro.

Sia $h \neq -1, 0$. In questo caso abbiamo un ellissoide o un iperboloide. Consideriamo:

$$P(T) = \begin{vmatrix} h-T & -1 & 0 \\ -1 & -1-T & 0 \\ 0 & 0 & h-T \end{vmatrix} = -T^3 + (2h-1)T^2 + (-h^2+2h+1)T - h^2 - h.$$

Abbiamo ellissoidi se abbiamo soluzioni per uno dei seguenti sistemi:

$$\begin{cases} 2h-1 > 0 \\ -h^2+2h+1 < 0 \\ -h^2-h > 0 \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} 2h-1 < 0 \\ -h^2+2h+1 < 0 \\ -h^2-h < 0. \end{cases}$$

Il primo sistema è impossibile, mentre il secondo ha soluzione $h < -1$, per cui concludiamo che per $h < -1$ abbiamo degli ellissoidi. Essendo $|B| = h+1$, vediamo che per $h > -1$, $h \neq 0$, abbiamo degli iperboloidi iperbolici, mentre per $h < -1$ abbiamo degli ellissoidi reali.