Corso di Laurea in Ingegneria Industriale (F-O)

Prova di **Algebra lineare e Geometria** - Appello 20 Febbraio 2023

Durata della prova: 3 ore.
È vietato uscire dall'aula prima di aver consegnato definitivamente il compito.
È vietato consultare libri o appunti.

Compito A

I

1. **5 punti.** Sia $f\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ l'endomorfismo definito dall'assegnazione:

$$M(f) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & h \\ 0 & 2 & h+2 & 1 \end{pmatrix}$$

al variare di $h \in \mathbb{R}$. Studiare f, determinando in ciascun caso $\operatorname{Im} f$ e $\operatorname{Ker} f$.

2. **5 punti.** Diagonalizzare, se possibile, le matrici:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ e } B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

3. **5 punti.** Dati gli spazi vettoriali $V = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid x - y = 0,\ (h+1)z + t = 0\}$ e $W = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + hy - t = 0,\ y - z = 0\}$, calcolare $V \cap W$ e $V + W$ al variare di $h \in \mathbb{R}$, specificando se la somma è diretta o meno.

4. **ESERCIZIO BONUS: 5 punti.** Sono assegnate in $\mathbb{R}^3$ le basi $\mathcal{A} = [(1,1,0),(0,0,1),(0,1,0)]$ e $\mathcal{B} = [(0,0,1),(0,1,0),(1,0,1)]$ ed è dato l'endomorfismo $g\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definito da:

$$M^{\mathcal{A},\mathcal{B}}(g) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & h & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Dato lo spazio $V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y - z = 0\}$, calcolare $g^{-1}(V)$ al variare di $h \in \mathbb{R}$, determinando il valore di $h \in \mathbb{R}$ per il quale $g^{-1}(V) = V$.

Soluzione

1. È facile vedere che $|M(f)| = -(h+1)(h-4)$. Questo significa che per $h \neq -1, 4$ l'endomorfismo f è un isomorfismo, ovvero f è iniettiva e suriettiva, per cui $\operatorname{Im} f = \mathbb{R}^4$ e $\operatorname{Ker} f = \{(0,0,0,0)\}$.

Sia $h = 4$. In tal caso:

$$M(f) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & 2 & 6 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{riducendo}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Quindi, in tal caso $\dim \operatorname{Im} f = \rho(M(f)) = 3$ e una sua base è data da $[(1,-1,1,0),(2,-1,1,2),(1,1,4,1)]$. Inoltre, $\dim \operatorname{Ker} f = 4 - 3 = 1$ e si ha:

$$\operatorname{Ker} f = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + 2y + z + t = 0,\ y + 3z + 2t = 0,\ 5t = 0\} = \mathcal{L}((5,-3,1,0)).$$

Sia $h = 1$. In tal caso:

$$M(f) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{riducendo}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & -3 \end{pmatrix}.$$

In tal caso, $\dim \operatorname{Im} f = \rho(M(f)) = 3$ e una sua base è data da $[(1,-1,1,0),(2,-1,1,2),(1,2,-2,1)]$. Inoltre, si ha $\dim \operatorname{Ker} f = 4 - 3 = 1$ e:

$$\operatorname{Ker} f = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + 2y + z + t = 0,\ y + 3z + 2t = 0,\ -5z - 3t = 0\} = \mathcal{L}((0,1,3,-5)).$$

2. Osserviamo che:

$$P_A(T) = \begin{vmatrix} 2-T & 1 & -1 \\ 1 & 2-T & 1 \\ 1 & 1 & 1-T \end{vmatrix} = (1-T)^2(3-T).$$

Quindi, gli autovalori sono 1 e 3, con $m_1 = 2$ e $m_3 = 1$. Questo vuol dire che certamente si ha $\dim V_3 = m_3 = 1$, mentre sappiamo che $1 \leq \dim V_1 \leq m_1 = 2$. Questo vuol dire che la matrice A è diagonalizzabile se e solo se $\dim V_1 = m_1 = 2$. Essendo:

$$A - I = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

vediamo che $\dim V_1 = 3 - \rho(A - I) = 3 - 2 = 1 < 2 = m_1$. Quindi, concludiamo che la matrice A non è diagonalizzabile.

Consideriamo, ora, la matrice B. Da:

$$P_B(T) = \begin{vmatrix} 2-T & 1 & -1 \\ 1 & 2-T & -1 \\ 1 & 1 & -T \end{vmatrix} = (2-T)(T-1)^2$$

vediamo che gli autovalori sono 1 e 2, con $m_2 = 1$ e $m_1 = 2$. Come poco fa, possiamo dire che la matrice B è diagonalizzabile se e solo se $\dim V_1 = m_1 = 2$. Da:

$$B - I = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

vediamo che $\dim V_1 = 3 - \rho(B - I) = 3 - 1 = 2 = m_1$, per cui possiamo dire che B è diagonalizzabile. Inoltre, dalla matrice precedente otteniamo:

$$V_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y - z = 0\} = \mathcal{L}((1,0,1),(0,1,1)).$$

Sia $T = 2$. Da:

$$B - 2I = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{riducendo}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

vediamo che:

$$V_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid y - z = 0,\ x - z = 0\} = \mathcal{L}((1,1,1)).$$

Quindi, una base di autovettori è $[(1,0,1),(0,1,1),(1,1,1)]$ e possiamo dire che $P^{-1}BP = D$, dove:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

3. Sappiamo che:

$$V \cap W = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid x-y=0,\ (h+1)z+t=0,\ x+hy-t=0,\ y-z=0\}.$$

Da:

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & h+1 & 1 \\ 1 & h & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = -2(h+1),$$

vediamo che la matrice incompleta associata al sistema avente come insieme delle soluzioni $V \cap W$ ha rango 4 per $h \neq -1$. Questo vuol dire che per $h \neq -1$ abbiamo:

$$V \cap W = \{(0,0,0,0)\}.$$

Ciò significa che per $h \neq -1$ la somma è certamente diretta. Inoltre, essendo $\dim V = \dim W = 2$ per ogni $h \in \mathbb{R}$, dalla formula di Grassman (nel caso della somma diretta) otteniamo:

$$\dim(V \oplus W) = \dim V + \dim W = 2+2 = 4.$$

Dal momento che $V \oplus W \subseteq \mathbb{R}^4$ e $\dim(V \oplus W) = \dim \mathbb{R}^4 = 4$, concludiamo anche che per $h \neq -1$ sia ha $V \oplus W = \mathbb{R}^4$.

Sia $h = -1$. In tal caso:

$$V \cap W = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid x-y=0,\ t=0,\ x-y-t=0,\ y-z=0\} = \mathcal{L}((1,1,1,0)).$$

Quindi, in questo caso la somma non è più diretta. Inoltre, essendo, per $h = -1$, $V = \mathcal{L}((1,1,0,0),(0,0,1,0))$ e $W = \mathcal{L}((1,1,1,0),(0,0,0,1))$, abbiamo $V + W = \mathcal{L}((1,1,0,0),(0,0,1,0),(1,1,1,0),(0,0,0,1))$. Da:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{riducendo}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

abbiamo che $\dim(V + W) = 3$ (come segue anche dalla formula di Grassman) e che una base di $V + W$ è data da $[(1,1,0,0),(0,0,1,0),(0,0,0,1)]$.

4. Dalla definizione di matrice associata a una applicazione lineare rispetto a due basi $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ segue che:

$$\begin{aligned} g(1,1,0) &= (2,-1,3) \\ g(0,0,1) &= (1,h,2) \\ g(0,1,0) &= (1,0,2), \end{aligned}$$

per cui è facile vedere che:

$$M(g) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & h \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Questo vuol dire che:

$$g(x,y,z) = (x+y+z, -x+hz, x+2y+2z) \quad \forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3.$$

Dunque:

$$g^{-1}(V) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid g(x,y,z) \in V\} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid -x-y+(h-1)z = 0\}.$$

È evidente, inoltre, che $g^{-1}(V) = V$ per $h = 2$.

1. **5 punti.** È assegnato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}, u$. Dati:

$$r\colon \begin{cases} x+y=0 \\ y+z=0, \end{cases} \quad s\colon \begin{cases} x=2 \\ y-z=0, \end{cases} \quad \alpha\colon x+z+1=0 \quad \text{e} \quad P=(1,0,2),$$

determinare il piano π ortogonale a r e passante per P; determinare il punto $H = \pi \cap r$; determinare la retta t passante per H, ortogonale a s e parallela ad α; calcolare $d(t,\alpha)$.

2. **5 punti.** È assegnato nel piano un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $O, \vec{x}, \vec{y}, u$. Determinare e studiare il fascio di coniche passanti per $A=(0,1)$, $B=(1,0)$ e tangenti in $C=(-1,-1)$ alla retta $r\colon x=-1$.

3. **5 punti.** È assegnato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}, u$. Determinare e studiare le quadriche contenenti la conica:

$$\Gamma\colon \begin{cases} 2xy+1=0 \\ z=0 \end{cases}$$

e i punti $A=(0,0,1)$, $B=(0,0,-1)$ e $C=(1,-2,1)$.

Soluzione

1. La retta r ha parametri direttori $(1,-1,1)$ per cui il piano π cercato ha equazione $x-y+z-3=0$. Dunque:

$$H = \pi \cap r\colon \begin{cases} x=-y \\ z=-y \\ x-y+z-3=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=-1 \\ z=1. \end{cases}$$

Quindi, $H=(1,-1,1)$. La retta s ha parametri direttori $(0,1,1)$ e $(1,0,1)$ sono le componenti di un vettore ortogonale al piano α. Questo vuol dire che, se (l,m,n) sono le componenti di un vettore parallelo a t deve essere:

$$\begin{cases} m+n=0 \\ l+n=0. \end{cases}$$

Possiamo, perciò, dire che $(1,1,-1)$ sono parametri direttori della retta t e che, dunque:

$$t\colon x-1=y+1=-(z-1) \Rightarrow t\colon \begin{cases} x-y-2=0 \\ y+z=0. \end{cases}$$

Inoltre, essendo la retta t parallela al piano α ed essendo $H=(1,-1,1) \in t$, possiamo dire che:

$$d(t,\alpha) = d(H,\alpha) = \frac{3}{\sqrt{2}}.$$

2. Le coniche spezzate del fascio sono $AB \cup r\colon (x+1)(x+y-1)=0$ e $AC \cup BC\colon (2x-y-1)(x-2y+1)=0$. Quindi, il fascio di coniche ha equazione:

$$h(x+1)(x+y-1)+(2x-y+1)(x-2y-1)=0 \Rightarrow (h+2)x^2+(h-5)xy+2y^2-x+(h-1)y-h-1=0.$$

Sappiamo che, per costruzione, le coniche del fascio sono irriducibili per $h \neq 0$, mentre per $h=0$ abbiamo una conica spezzata. Inoltre, da:

$$|A| = \begin{vmatrix} h+2 & \frac{h-5}{2} \\ \frac{h-5}{2} & 2 \end{vmatrix} = -\frac{h^2-18h+9}{4}$$

vediamo che per $-9-6\sqrt{2} < h < -9+6\sqrt{2}$ si ha $|A|>0$, per cui abbiamo, in questo caso, delle ellissi reali, poiché i punti base sono reali; non figurano circonferenze nel fascio; per $h=-9\pm 6\sqrt{2}$ abbiamo delle parabole; per $h<-9-6\sqrt{2}$ e $h>-9+6\sqrt{2}$, $h \neq 0$,abbiamo delle iperboli, tra le quali quella equilatera figura per $h=-4$.

3. Le quadriche contenenti la conica hanno equazione:

$$2xy + 1 + z(ax + by + cz + d) = 0.$$

Imponendo il passaggio per i punti A, B e C, abbiamo:

$$\begin{cases} c + d + 1 = 0 \\ c - d + 1 = 0 \\ a - 2b - 4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c = -1 \\ d = 0 \\ a = 2b + 4. \end{cases}$$

Questo vuol dire che le quadriche cercate hanno equazione:

$$2xy + 1 + z[(2b + 4)x + by - z] = 0 \Rightarrow 2xy + (2b + 4)z + byz - z^2 + 1 = 0.$$

Essendo:

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & b+2 & 0 \\ 1 & 0 & \frac{b}{2} & 0 \\ b+2 & \frac{b}{2} & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & b+2 \\ 1 & 0 & \frac{b}{2} \\ b+2 & \frac{b}{2} & -1 \end{pmatrix},$$

vediamo che $|B| = |A| = (b + 1)^2$. Quindi, per $h \neq -1$ abbiamo necessariamente degli iperboloidi iperbolici (le quadriche non possono essere ellissoidi immaginari perché contengono punti reali); per $h = -1$ è facile verificare che $\rho(B) = 3$, per cui in questo caso abbiamo un cilindro.