Corso di Laurea in Ingegneria Industriale (F-O)

Prova di **Algebra lineare e Geometria** - Appello 20 Dicembre 2023

Durata della prova: 3 ore.
È vietato uscire dall'aula prima di aver consegnato definitivamente il compito.
È vietato consultare libri o appunti.

I

Sia $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ l'endomorfismo definito dalle assegnazioni:

$$\begin{gathered} f(1,0,1)=(2,3,h+1)\\ f(1,-1,0)=(1-h,1-h,2h)\\ f(1,1,0)=(h+1,h+1,0)\end{gathered}$$

al variare di $h\in\mathbb{R}$.

1. **5 punti.** Studiare f, determinando in ciascun caso $\operatorname{Im} f$ e $\operatorname{Ker} f$ e le loro equazioni cartesiane.
2. **5 punti.** Diagonalizzare, se possibile, le seuguenti matrici:
$$A=\begin{pmatrix}1&2&1\\1&2&2\\2&-2&1\end{pmatrix}\quad \text{e}\quad B=\begin{pmatrix}2&1&2\\1&2&2\\2&2&5\end{pmatrix}.$$
3. **5 punti.** Sono dati i sottospazi $V=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid 2x-y-z=0\}$ e $W=\mathscr{L}((1,h,1),(h,1,h))$. Calcolare $f^{-1}(V)$ al variare di $h\in\mathbb{R}$ e determinare il valore di h per il quale si ha $f^{-1}(V)=W$.

Soluzione

1. È facile vedere che:
$$M(f)=\begin{pmatrix}1&h&1\\1&h&2\\h&-h&1\end{pmatrix},$$
per cui $|M(f)|=h^2+h$. Questo vuol dire che per $h\neq 0,-1$ f è un isomorfismo, cioè f è iniettiva e suriettiva, per cui $\operatorname{Ker} f=\{(0,0,0)\}$ e $\operatorname{Im} f=\mathbb{R}^3$.
Sia $h=0$. In tal caso:
$$M(f)=\begin{pmatrix}1&0&1\\1&0&2\\0&0&1\end{pmatrix}.$$
In tal caso, è chiaro che $\dim\operatorname{Im} f=\rho(M(f))=2$ e una base di $\operatorname{Im} f$ è data da $[(1,1,0),(1,2,1)]$, per cui da:
$$\begin{vmatrix}1&1&0\\1&2&1\\x&y&z\end{vmatrix}=0\Leftrightarrow x-y+z=0$$
otteniamo che:
$$\operatorname{Im} f=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x-y+z=0\}.$$
Inoltre, è chiaro anche che, essendo $\dim\operatorname{Ker} f=1$, deve essere $\operatorname{Ker} f=\mathscr{L}((0,1,0))$.

Sia $h=-1$. In tal caso:

$$M(f)=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{riducendo}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Quindi, $\dim \operatorname{Im} f = \rho(M(f)) = 2$ e una sua base è data da $[(1,1,-1),(1,2,1)]$ e da:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ x & y & z \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow 3x-2y+z=0$$

vediamo che $\operatorname{Im} f = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid 3x-2y+z=0\}$. Inoltre, $\dim \operatorname{Ker} f = 1$ e si ha:

$$\operatorname{Ker} f = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x-y+z=0,\ z=0\} = \mathscr{L}((1,1,0)).$$

2. Osserviamo che:

$$P_A(T)=\begin{vmatrix} 1-T & 2 & 1 \\ 1 & 2-T & 2 \\ 2 & -2 & 1-T \end{vmatrix} = -T^3+4T^2-5T+6=(T-3)(-T^2+T-2).$$

Quindi, la matrice A ha come unico autovalore 3, con $m_3=1$, per cui possiamo dire certamente che la matrice A non è diagonalizzabile.

Consideriamo, ora, la matrice B. Dato che:

$$P_B(T)=\begin{vmatrix} 2-T & 1 & 2 \\ 1 & 2-T & 2 \\ 2 & 2 & 5-T \end{vmatrix} = -T^3+9T^2-15T+7=-(T-1)^2(T-7),$$

gli autovalori di B sono 1 e 7, con $m_1=2$ e $m_7=1$. Quindi, dovendo necessariamente essere $\dim V_7 = m_7 = 1$, la matrice B è diagonalizzabile se e solo se $\dim V_1 = m_1 = 2$.

Sia $T=1$. Da:

$$B-I=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

vediamo che $\dim V_1 = 3-\rho(B-I)=3-1=2=m_1$. Questo vuol dire che B è diagonalizzabile. Inoltre, abbiamo anche che:

$$V_1=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x+y+2z=0\}=\mathscr{L}((-1,1,0),(-2,0,1)).$$

Sia $T=7$. Dato che:

$$B-7I=\begin{pmatrix} -5 & 1 & 2 \\ 1 & -5 & 2 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{riducendo}} \begin{pmatrix} -5 & 1 & 2 \\ 6 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

abbiamo:

$$V_7=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid -5x+y+2z=0 6x-6y=0\}=\mathscr{L}((1,1,2)).$$

Quindi, possiamo dire che una base di aituovettori è $[(-1,1,0),(-2,0,1),(1,1,2)]$, per cui $P^{-1}BP=D$, dove:

$$P=\begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad D=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}.$$

3. È facile vedere che:

$$f(x,y,z)=(x+hy+z,x+hy+2z,hx-hy+z) \quad \forall (x,y,z)\in\mathbb{R}^3.$$

Quindi:

$$f^{-1}(V)=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid (1-h)x+2hy-z=0\}.$$

Questo vuol dire che $\dim f^{-1}(V) = 2$ per ogni $h \in \mathbb{R}$. Osserviamo, poi, che $W = \mathscr{L}((1,h,1),(h,1,h)) \subseteq f^{-1}(V)$ se e solo se $(1,h,1),(h,1,h) \in f^{-1}(V)$. Quindi:

$$(1,h,1) \in f^{-1}(V) \Leftrightarrow 2h^2 - h = 0$$

$$(h,1,h) \in f^{-1}(V) \Leftrightarrow -h^2 + 2h = 0.$$

Entrambe le condizioni sono verificate per $h = 0$, nel qual caso abbiamo che $W \subseteq f^{-1}(V)$ e, inoltre, $\dim W = \dim f^{-1}(V) = 2$. Quindi, possiamo dire che $h = 0$ è il valore per il quale $W = f^{-1}(V)$.

II

1. **5 punti.** È assegnato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}, u$. Sono dati i piani:
$$\pi_1 : x - y + z + 4 = 0 \quad \text{e} \quad \pi_2 : 2x + y + 4z + 5 = 0$$
e il punto $A = (1,1,-1)$. Determinare la retta r parallela ai piani π_1 e π_2 e passante per A e la retta s simmetrica di r rispetto a π_1.

2. **5 punti.** È assegnato nel piano un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $O, \vec{x}, \vec{y}, u$. Studiare il fascio di coniche di equazione:
$$hx^2 + xy - hy^2 - x - y + 1 - h = 0$$
al variare di $h \in \mathbb{R}$, determinandone, in particolare, punti base e coniche spezzate.

3. **5 punti.** È assegnato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}, u$. Studiare le quadriche di equazione:
$$x^2 + hxy + hy^2 - 2yz + z^2 - 1 = 0,$$
al variare di $h \in \mathbb{R}$.

4. **ESERCIZIO BONUS: 5 PUNTI.** È assegnato nel piano un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $O, \vec{x}, \vec{y}, u$. Determinare l'iperbole equilatera avente come asintoto la retta di equazione $x + 2y + 1 = 0$, centro di simmetria il punto $C = (-1,0)$ e passante per l'origine O.

Soluzione

1. La retta r è intersezione dei piani paralleli a π_1 e π_2 e passanti per A, per cui:
$$\begin{cases} x - y + z + 1 = 0 \\ 2x + y + 4z + 1 = 0. \end{cases}$$
Dato che r è parallela a π_1, la retta s è parallela a π_1 e passa per il punto A' simmetrico di A rispetto al piano π_1. Consideriamo, allora, la retta t passante per A e ortogonale a π_1:
$$t\colon \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 - t \\ z = -1 + t \end{cases}$$
e consideriamo il punto:
$$H = \pi_1 \cap t\colon \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 - t \\ z = -1 + t \\ x - y + z + 4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t = -1 \\ x = 0 \\ y = 2 \\ z = -2. \end{cases}$$
Quindi, $H = (0,2,-2)$ e il punto $A' = (x,y,z)$ è il simmetrico di A rispetto ad H, per cui:
$$\begin{cases} \dfrac{x-1}{2} = 0 \\ \dfrac{y-1}{2} = 2 \\ \dfrac{z+1}{2} = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 5 \\ z = -5. \end{cases}$$

Quindi, la retta s è la retta parallela a r e passante per $A' = (-1, 5, -5)$:

$$s\colon \begin{cases} x - y + z + 9 = 0 \\ 2x + y + 4z + 13 = 0. \end{cases}$$

2. La conica nascosta del fascio ha equazione $x^2 - y^2 - 1 = 0$, per cui è un'iperbole equilatera. Inoltre, dato che:

$$|B| = \begin{vmatrix} h & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -h & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1-h \end{vmatrix} = \frac{1}{4} h(4h^2 - 4h + 1),$$

vediamo che le coniche spezzate del fascio si ottengono per $h = 0$ e $h = \frac{1}{2}$, per cui sono le seguenti coniche:

$$(x-1)(y-1) = 0$$

e

$$[x - (\sqrt{2}+1)y + 1][x - (-\sqrt{2}+1)y + 1] = 0.$$

I punti base del fascio si ottengono intersecando due coniche qualsiasi del fascio:

$$\begin{cases} x^2 - y^2 - 1 = 0 \\ (x-1)(y-1) = 0, \end{cases}$$

per cui otteniamo il punto $(1, 0)$ contato due volte e i punti $(\sqrt{2}, 1)$ e $(-\sqrt{2}, 1)$. Infine, osservando che $\mathrm{Tr}(A) = 0$ per ogni valore di h, concludiamo che per $h \neq 0, \frac{1}{2}$ le coniche del fascio sono tuttte iperboli equilatere.

3. Le matrici associate sono:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & \frac{h}{2} & 0 & 0 \\ \frac{h}{2} & h & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{h}{2} & 0 \\ \frac{h}{2} & h & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Dal momento che $|B| = \frac{(h-2)^2}{4}$ e $|A| = -\frac{(h-2)^2}{4}$, vediamo che per $h \neq \frac{1}{2}$ abbiamo ellissoidi o iperboloidi, mentre per $h = 2$, dato che $\rho(B) = 3$, abbiamo un cilindro.

Sia $h \neq 2$. In questo caso:

$$P_A(T) = (1-T)\left[T^2 - (h+1)T - \frac{(h-2)^2}{4}\right],$$

per cui possiamo dire che le quadriche non sono mai ellissoidi, ma sono tutti iperboloidi iperbolici, poiché $|B| > 0$ per $h \neq 2$.

4. La retta ortogonale a $x + 2y + 1 = 0$ e passante per C ha equazione $2x - y + 2 = 0$. Quindi, l'iperbole equilatera cercata ha come asintoti le rette $x + 2y + 1 = 0$ e $2x - y + 2 = 0$. Il fascio di coniche tangenti alle due rette nei loro punti impropri ha equazione:

$$(x + 2y + t)(2x - y + 2t) + ht^2 = 0 \Rightarrow (x + 2y + 1)(2x - y + 2) + h = 0.$$

Imponendo il passaggio per l'origine O abbiamo la condizione $h = -2$ e possiamo dire che l'iperbole cercata ha equazione:

$$(x + 2y + 1)(2x - y + 2) - 2 = 0 \Rightarrow 2x^2 + 3xy - 2y^2 + 4x + 3y = 0.$$