Corso di Laurea in Ingegneria Elettronica

Prova di **Algebra lineare e Geometria** - Appello 19 Dicembre 2023

Durata della prova: 3 ore.
È vietato uscire dall'aula prima di aver consegnato definitivamente il compito.
È vietato consultare libri o appunti.

I

Sia $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'endomorfismo definito dalle assegnazioni:

$$\begin{aligned} f(1,0,1) &= (3,0,3) \\ f(2,1,-1) &= (h+1, 3h+1, -h-5) \\ f(1,0,-1) &= (-1, 2h, -5), \end{aligned}$$

al variare di $h \in \mathbb{R}$.

1. **5 punti.** Studiare f al variare di $h \in \mathbb{R}$, determinando in ciascun caso $\operatorname{Im} f$ e $\operatorname{Ker} f$ e le loro equazioni cartesiane.
2. **5 punti.** Studiare la semplicità di f nei casi $h = 0$ e $h = 1$, determinando, ove possibile, una base di autovettori per f.
3. **5 punti.** Sono dati $U = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x - hy = 0, y + z = 0\}$ e $V = \mathscr{L}((1,0,h,0),(0,h,-2,1))$, con $h \in \mathbb{R}$. Determinare $U \cap V$ e $U + V$ al variare di $h \in \mathbb{R}$, specificando, in particolare, i casi in cui la somma è diretta o meno.

Soluzione

1. Dalle assegnazioni si ottiene facilmente che:

$$M(f) = \begin{pmatrix} 1 & h+1 & 2 \\ h & 1 & -h \\ -1 & -h+1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Dal momento che $|M(f)| = 6 - 6h^2$, concludiamo che per $h \neq \pm 1$ f è un isomorfismo, cioè f è iniettiva e suriettiva, per cui si ha $\operatorname{Ker} f = \{(0,0,0)\}$ e $\operatorname{Im} f = \mathbb{R}^3$.

Sia $h = 1$. In questo caso:

$$M(f) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{riducendo}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Quindi, $\dim \operatorname{Im} f = \rho(M(f)) = 2$ e una sua base è $[(1,1,-1),(2,1,0)]$. Inoltre, da:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ x & y & z \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow x - 2y - z = 0$$

vediamo che $\operatorname{Im} f = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - 2y - z = 0\}$. Sappiamo, poi, che $\dim \operatorname{Ker} f = 3 - \dim \operatorname{Im} f = 1$ e che:

$$\operatorname{Ker} f = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + 2y + 2z = 0, -y - 3z = 0\} = \mathscr{L}((4,-3,1)).$$

Sia $h = -1$. In questo caso:

$$M(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{riducendo}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Quindi, $\dim \operatorname{Im} f = \rho(M(f)) = 2$ e una sua base è $[(1,-1,-1),(0,1,2)]$. Inoltre, da:

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ x & y & z \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow -x-2y+z = 0$$

vediamo che $\operatorname{Im} f = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x+2y-z = 0\}$. Sappiamo, poi, che $\dim \operatorname{Ker} f = 3 - \dim \operatorname{Im} f = 1$ e che:

$$\operatorname{Ker} f = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x+2z = 0,\ y+3z = 0\} = \mathscr{L}((-2,-3,1)).$$

2. Sia $h = 1$. In questo caso abbiamo:

$$P(T) = \begin{vmatrix} 1-T & 2 & 2 \\ 1 & 1-T & -1 \\ -1 & 0 & 4-T \end{vmatrix} = -T(T-3)^2.$$

Quindi, gli autovalori sono 0 e 3, con $m_0 = 1$ e $m_3 = 2$. Sappiamo che $\dim V_0 = m_0 = 1$ e che $1 \leq \dim V_3 \leq m_3 = 2$, per cui possiamo dire che f è semplice se e solo se $\dim V_3 = m_3 = 2$.

Sia, dunque, $T = 3$. Sappiamo che $V_3 = \operatorname{Ker} f_3$, dove $f_3 = f - 3i$ e:

$$M(f_3) = M(f) - 3I = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ 1 & -2 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{riducendo}} \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Quindi $\dim V_3 = 3 - \rho(M(f_3)) = 3 - 2 = 1 < 2 = m_3$, per cui per $h = 1$ f non è semplice.

Sia $h = 0$. In questo caso:

$$P(T) = \begin{vmatrix} 1-T & 1 & 2 \\ 0 & 1-T & 0 \\ -1 & 1 & 4-T \end{vmatrix} = -(T-1)(T-2)(T-3).$$

Quindi, gli autovalori 1, 2, 3, tutti distinti di molteplicità algebrica 1, per cui possiamo dire che certamente per $h = 0$ f è semplice.

Sia $T = 1$. Sappiamo che $V_1 = \operatorname{Ker} f_1$, dove $f_1 = f - i$ e:

$$M(f_1) = M(f) - I = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{riducendo}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Quindi:

$$V_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid y+2z = 0, -x+z = 0\} = \mathscr{L}((1,-2,1)).$$

Sia $T = 2$. Sappiamo che $V_2 = \operatorname{Ker} f_2$, dove $f_2 = f - 2i$ e:

$$M(f_2) = M(f) - 2I = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{riducendo}} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Quindi:

$$V_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid -x+y+2z = 0, -y = 0\} = \mathscr{L}((2,0,1)).$$

Sia $T = 3$. Sappiamo che $V_3 = \operatorname{Ker} f_3$, dove $f_3 = f - 3i$ e:

$$M(f_3) = M(f) - 3I = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{riducendo}} \begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Quindi:

$$V_3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid -2x + y + 2z = 0, -2y = 0\} = \mathscr{L}((1,0,1)).$$

Quindi, per $h = 0$ una base di autovettori per f è $[(1,-2,1),(2,0,1),(1,0,1)]$.

3. Osserviamo facilmente che $\dim U = \dim V = 2$ per ogni $h \in \mathbb{R}$. Inoltre, essendo:

$$U = \{(hy, y, -y, t) \in \mathbb{R}^4\} = \mathscr{L}((h,1,-1,0),(0,0,0,1)),$$

abbiamo:

$$U + V = \mathscr{L}((h,1,-1,0),(0,0,0,1),(1,0,h,0),(0,h,1,1)).$$

Dato che:

$$\begin{vmatrix} h & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & h & 0 \\ 0 & h & -2 & 1 \end{vmatrix} = -h^3 - h + 2 = (1-h)(h^2 + h + 2),$$

concludiamo che per $h \neq 1$ si ha $\dim(U + V) = 4$, ma, essendo $U + V \subseteq \mathbb{R}^4$, si ha $U + V = \mathbb{R}^4$. Inoltre, dalla formula di Grassmann ricaviamo facilmente che $\dim(U \cap V) = 0$. Questo vuol dire che $U \cap V = \{(0,0,0,0)\}$, per cui abbiamo $U \oplus V = \mathbb{R}^4$ per $h \neq 1$.

Sia $h = 1$. In tal caso, da:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{riducendo}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

vediamo che $\dim(U + V) = 3$ e una sua base è data da $[(1,1,-1,0),(0,0,0,1),(1,0,1,0)]$. Per calcolare $U \cap V$ occorrono le equazioni cartesiane di V:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ x & y & z & t \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{riducendo}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -x + 2y + z & -y + t \end{pmatrix},$$

$$\Rightarrow V = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid -x + 2y + z = 0, -y + t = 0\}.$$

Dunque:

$$U \cap V = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid -x + 2y + z = 0, -y + t = 0, x - y = 0, y + z = 0\} = \mathscr{L}((1,1,-1,1)).$$

II

1. **5 punti.** È assegnato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}, u$. Sono dati le rette

$$r\colon \begin{cases} x - y + z + 2 = 0 \\ 2x + y + z - 1 = 0 \end{cases} \quad \text{e} \quad \pi\colon x + 2y + 4 = 0$$

il punto $P = (-1,1,-1)$. Determinare la retta s ortogonale a r, parallela a π e passante per P e la retta t simmetrica di s rispetto al piano π.

2. **5 punti.** È assegnato nel piano un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $O, \vec{x}, \vec{y}, u$. Determinare e studiare il fascio di coniche tangenti alla retta $r_1\colon x + y - 1 = 0$ e alla retta $r_2\colon 2x + y = 0$ nei punti in cui esse incontrano la retta $r_3\colon y - 1 = 0$. Determinare la natura della conica del fascio passante per il punto $P_\infty = (3,-4,0)$.

3. **5 punti.** È assegnato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}, u$. Studiare, al variare di $h \in \mathbb{R}$, le quadriche di equazione:

$$x^2 + 2xy + hy^2 + hz^2 - 2x + h = 0.$$

4. **ESERCIZIO BONUS: 5 PUNTI.** Determinare, al variare di $h \in \mathbb{R}$, la natura della conica Γ di equazioni:

$$\Gamma\colon \begin{cases} x^2 + 2xy + hy^2 + hz^2 - 2x + h = 0 \\ y - z = 0. \end{cases}$$

Soluzione

1. La retta r ha parametri direttori $(-2, 1, 3)$ e $(1, 2, 0)$ sono le componenti di un vettore ortognale al piano π. Quindi, se (l, m, n) sono le componenti di un vettore parallelo a s, si ha:

$$\begin{cases} -2l + m + 3n = 0 \\ l + 2m = 0, \end{cases}$$

da cui segue che $(-6, 3, -5)$ sono parametri direttori di s e si ha:

$$s\colon \begin{cases} \dfrac{x+1}{-6} = \dfrac{y-1}{3} \\ \dfrac{x+1}{-6} = \dfrac{z+1}{-5} \end{cases} \Rightarrow s\colon \begin{cases} x + 2y - 1 = 0 \\ 5x - 6z - 1 = 0. \end{cases}$$

La retta t simmetrica ddi s rispetto a π è parallela al piano π e passa per il punto P' simmetrico di P rispetto a π.

Sia p la retta passante per P e ortogonale a piano π:

$$p\colon \begin{cases} x = -1 + t \\ y = 1 + 2t \\ z = -1 \end{cases}$$

e sia $H = \pi \cap p$:

$$H = \pi \cap p\colon \begin{cases} x = -1 + t \\ y = 1 + 2t \\ z = -1 \\ x + 2y + 4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t = -1 \\ x = -2 \\ y = -1 \\ z = -1. \end{cases}$$

Quindi, $H = (-2, -1, -1)$ e P' è il simmetrico di P rispetto ad H, per cui si vede facilmente che $P' = (-3, -3, -1)$ e che:

$$t\colon \begin{cases} x + 2y + 9 = 0 \\ 5x - 6z + 9 = 0. \end{cases}$$

2. Il fascio di coniche ha equazione:

$$(x + y - 1)(2x + y) + h(y-1)^2 = 0 \Rightarrow 2x^2 + 3xy + (h+1)y^2 - 2x - (2h+1)y + h = 0.$$

Sappiamo che le coniche irriducibili del fascio sono solo le due usate per scriverne l'equazione, per cui possiamo subito concludere che per $h \neq 0$ le coniche sono irriducibili, mentre per $h = 0$ abbiamo una conica spezzata. Inoltre:

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & \dfrac{3}{2} \\ \dfrac{3}{2} & h+1 \end{vmatrix} = 2h - \frac{1}{4}.$$

Dunque, per $h > \frac{1}{8}$ abbiamo delle ellissi reali, in quanto i punti base sono reali; non ci sono circonferenze nel fascio; per $h = \frac{1}{8}$ abbiamo una parabola; per $h < \frac{1}{8}$, $h \neq 0$, abbiamo delle iperboli, tra le quali figura una equilatera per $h = -3$.

Per cercare la conica del fascio passante per il punto improprio $P_\infty = (3,-4,0)$ occorre imporre il passaggio per P_∞ nell'equazione del fascio scritta in coordinate omogenee:

$$2x^2+3xy+(h+1)y^2-2xt-(2h+1)yt+ht^2=0,$$

per cui si ottiene $h=\frac{1}{8}$ e la conica cercata è la parabola del fascio.

3. Le matrici associate sono:

$$B=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & h & 0 & 0 \\ 0 & 0 & h & 0 \\ -1 & 0 & 0 & h \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & h & 0 \\ 0 & 0 & h \end{pmatrix}.$$

Dato che $|B|=h^2(h-2)$ e $|A|=h(h-1)$, per $h=1$ abbiamo un paraboloide ellittico e per $h=2$ un cono. Per $h=0$ si vede che $\rho(B)=2$, per cui abbiamo una quadrica spezzata.

Sia $h\neq 0,1,2$. Dato che:

$$P_A(T)=\begin{vmatrix} 1-T & 1 & 0 \\ 1 & h-T & 0 \\ 0 & 0 & h-T \end{vmatrix}=(h-T)[T^2-(h+1)T+h-1],$$

abbiamo un ellissoide se uno dei seguenti sistemi ammette soluzioni:

$$\begin{cases} h>0 \\ h+1>0 \\ h-1>0 \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} h<0 \\ h+1<0 \\ h-1>0. \end{cases}$$

Il secondo sistema è impossibile, mentre il primo ha soluzioni per $h>1$, per cui per $h>1$, $h\neq 2$, abbiamo degli ellissoidi. In particolare, essendo $|B|=h^2(h-2)$, vediamo che per $h<1$ abbiamo degli iperboloidi ellittici; per $1<h<2$ abbiamo degli ellissoidi reali, mentre per $h>2$ abbiamo degli ellissoidi immaginari.

4. Abbiamo:

$$\Gamma\colon \begin{cases} x^2+2xy+hy^2+hz^2-2x+h=0 \\ y-z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2+2xy+2hy^2-2x+h=0 \\ y-z=0. \end{cases}$$

La quadrica di equazione $x^2+2xy+2hy^2-2x+h=0$ è spezzata per $h=0$ e $h=\frac{3}{2}$, per cui per tali valori di h la conica Γ è spezzata. Per $h\neq 0,\frac{3}{2}$, la quadica è un cilindro di vertice il punto $(0,0,1,0)$ che non appartiene al piano $y-z=0$, per cui in questi casi Γ è irriducibile. In tali casi, i punti impropri di Γ sono dati da:

$$\begin{cases} x^2+2xy+2hy^2-2xt+ht^2=0 \\ y-z=0 \\ t=0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2+2hxy+2hy^2=0 \\ y-z=0 \\ t=0, \end{cases}$$

per cui si vede che abbiamo un'equazione di secondo grado con $\frac{\Delta}{4}=h^2-2h$. Quindi, per $h<0$ e $h>2$ abbiamo delle ellissi; per $h=2$ abbiamo una parabola, mentre per $0<h<2$, $h\neq\frac{3}{2}$, abbiamo delle iperboli.