Corso di Laurea in Ingegneria Elettronica

Prova di **Algebra lineare e Geometria** - Appello 13 Settembre 2023

Durata della prova: 3 ore.
È vietato uscire dall'aula prima di aver consegnato definitivamente il compito.
È vietato consultare libri o appunti.

I

È assegnato $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tale che:

$$\begin{aligned} f(1,1,0) &= (1,1,h-1) \\ f(1,0,0) &= (2,h,h) \\ f(0,2,1) &= (0,4-2h,1), \end{aligned}$$

al variare di $h \in \mathbb{R}$.

1. **5 punti.** Studiare f, determinando in ciascun caso $\operatorname{Im} f$ e $\operatorname{Ker} f$ e le loro equazioni cartesiane.
2. **5 punti.** Diagonalizzare, se possibile, le seguenti matrici:
$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$
3. **5 punti.** Calcolare, al variare di $h \in \mathbb{R}$, $f^{-1}(1,h,0)$.

Soluzione

1. Dalle condizioni date vediamo che:
$$M(f) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ h & 1-h & 2 \\ h & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$
Vediamo che $|M(f)| = 2h^2-9h+10$, per cui possiamo dire che per $h \neq 2, \frac{5}{2}$ f è un isomorfismo, cioè è iniettiva e suriettiva. Questo vuol dire che $\operatorname{Ker} f = \{(0,0,0)\}$ e $\operatorname{Im} f = \mathbb{R}^3$.
Sia $h = 2$. In tal caso:
$$M(f) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{riducendo}} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$
Ciò vuol dire che per $h = 2$ $\dim \operatorname{Im} f = \rho(M(f)) = 2$ e una sua base è data da $[(2,2,2),(2,2,3)]$, ovvero anche $[(1,1,1),(2,2,3)]$. Da:
$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \\ x & y & z \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow x - y = 0$$
otteniamo che $\operatorname{Im} f = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - y = 0\}$. Inoltre, sappiamo che $\dim \operatorname{Ker} f = 3 - \dim \operatorname{Im} f = 1$ e:
$$\operatorname{Ker} f = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x - y + 2z = 0,\ z = 0\} = \mathscr{L}((1,2,0)).$$

Sia $h=\frac{5}{2}$. In tal caso:

$$M(f)=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ \dfrac{5}{2} & -\dfrac{3}{2} & 2 \\ \dfrac{5}{2} & -1 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{riducendo}} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -\dfrac{1}{2} & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ciò vuol dire che per $h=\frac{5}{2}$ $\dim \operatorname{Im} f=\rho(M(f))=2$ e una sua base è data da $[(2,\frac{5}{2},\frac{5}{2}),(-1,-\frac{3}{2},-1)]$, ovvero anche $[(4,5,5),(2,3,2)]$. Da:

$$\begin{vmatrix} 4 & 5 & 5 \\ 2 & 3 & 2 \\ x & y & z \end{vmatrix}=0 \Leftrightarrow -5x+2y+2z=0$$

otteniamo che $\operatorname{Im} f=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid -5x+2y+2z=0\}$. Inoltre, sappiamo che $\dim \operatorname{Ker} f=3-\dim \operatorname{Im} f=1$ e:

$$\operatorname{Ker} f=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid 2x-y+2z=0,\ -\tfrac{1}{2}x-z=0\}=\mathscr{L}((-2,-2,1)).$$

2. Cominciamo con la matrice A:

$$P_A(T)=\begin{vmatrix} 2-T & -1 & 2 \\ 1 & -T & 2 \\ 1 & -1 & 3-T \end{vmatrix}=(3-T)(T^2-2T+1).$$

Quindi, gli autovalori sono 3 e 1, con $m_3=1$ e $m_1=2$. Questo vuol dire che A è diagonalizzabile solo se $\dim V_1=m_1=2$.

Sia $T=1$. Da:

$$A-I=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

risulta chiaro che $\rho(A-I)=1$ e $\dim V_1=3-1=2=m_1$, il che vuol dire che A è diagonalizzabile. Inoltre:

$$V_1=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x-y+2z=0\}=\mathscr{L}((1,1,0),(0,2,1)).$$

Sia $T=3$. Da:

$$A-3I=\begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 1 & -3 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{riducendo}} \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

vediamo che:

$$V_3=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid -x-y+2z=0,\ 2x-2y=0\}=\mathscr{L}((1,1,1)).$$

Quindi, una base di autovettori è $[(1,1,0),(0,2,1),(1,1,1)]$ e possiamo dire che $P^{-1}AP=D$, dove:

$$P=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad D=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Consideriamo, ora, la matrice B:

$$P_B(T)=\begin{vmatrix} 2-T & -1 & 2 \\ 1 & -T & 2 \\ 0 & 0 & 3-T \end{vmatrix}=(3-T)(T^2-2T+1).$$

Quindi, gli autovalori sono 3 e 1, con $m_3=1$ e $m_1=2$. Questo vuol dire che B è diagonalizzabile solo se $\dim V_1=m_1=2$.

Sia $T=1$. Da:

$$B-I=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

risulta chiaro che $\rho(B-I)=1$ e $\dim V_1=3-2=1<2=m_1$, il che vuol dire che B non è diagonalizzabile.

3. Per calcolare $f^{-1}(1,h,0)$ occorre risolvere il sistema la cui matrice completa associata è:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 2 & 1 \\ h & 1-h & 2 & h \\ h & -1 & 3 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{riducendo, per } h\neq 2} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 2 & 1 \\ 2-h & 0 & 4-2h & 1 \\ 0 & 0 & 5-2h & 0 \end{array}\right).$$

Quindi, per $h \neq 2, \frac{5}{2}$ abbiamo:

$$\begin{cases} 2x-y+2z=1 \\ (2-h)x+(4-2h)z=1 \\ (5-2h)z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\dfrac{1}{2-h} \\ y=\dfrac{h}{2-h} \\ z=0, \end{cases}$$

per cui per $h \neq 2, \frac{5}{2}$ abbiamo:

$$f^{-1}(1,h,0)=\left\{\left(\frac{1}{2-h},\frac{h}{2-h},0\right)\right\}.$$

Sia $h=\frac{5}{2}$. In questo caso, la matrice che abbiamo ottenuto con la riduzione diventa:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 2 & 1 \\ -\dfrac{1}{2} & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \end{array}\right),$$

per cui:

$$f^{-1}(1,h,0)=f^{-1}\left(1,\tfrac{5}{2},0\right)=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid 2x-y+2z=1,\ -\frac{1}{2}x-z=1\right\}=\left\{\left((-2z-2,-2z-5,z)\in\mathbb{R}^3\right)\right\}.$$

Sia $h=2$. In questo caso, la matrice iniziale è:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 3 & 0 \end{array}\right)$$

ed è evidente che il sistema non ammette soluzioni, per cui in questo caso abbiamo:

$$f^{-1}(1,h,0)=f^{-1}(1,2,0)=\emptyset.$$

II

1. **5 punti.** È assegnato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $O,\vec{x},\vec{y},\vec{z},u$. Sono dati i piani $\pi_1\colon 2x+y+3z+3=0$ e $\pi_2\colon x+2y+z+2=0$ e il punto $P=(0,1,1)$. Determinare:
   - la retta r parallela ai piani π_1 e π_2 e passante per P;
   - la retta s ortogonale a π_1 e passante per P;
   - il punto P' simmetrico di P rispetto al piano π_1.

2. **5 punti.** È assegnato nel piano un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $O,\vec{x},\vec{y},u$. Determinare e studiare il fascio di coniche passanti per i punti $A=(1,0)$, $B=(2,0)$, $C=(-1,1)$ e $D=(-2,1)$.

3. **5 punti.** È assegnato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $O,\vec{x},\vec{y},\vec{z},u$. Determinare il cono e il cilindro contenenti la conica di equazioni:

$$\Gamma\colon \begin{cases} x^2+y^2+2x-2=0 \\ z=0 \end{cases}$$

e aventi vertici, rispettivamente, $V_1=(1,-1,1)$ e $V_2=(0,0,1,0)$.

4. **ESERCIZIO BONUS: 5 punti.** È assegnato nel piano un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $O, \vec{x}, \vec{y}, u$. Determinare l'iperbole avente per asintoti le rette $r_1\colon\ x+2y-1=0$ e $r_2\colon\ 3x-y+2=0$ e passante per il punto $P=(1,1)$. Determinare il centro di simmetria dell'iperbole.

Soluzione

1. La retta r ha equazioni del tipo:
$$r\colon\ \begin{cases} 2x+y+3z+h=0 \\ x+2y+z+k=0. \end{cases}$$
Imponendo il passaggio per il punto P otteniamo facilmente che deve essere $h=-4$ e $k=-3$, per cui:
$$r\colon\ \begin{cases} 2x+y+3z-4=0 \\ x+2y+z-3=0. \end{cases}$$
Inoltre, è facile vedere che:
$$s\colon\ \begin{cases} x=2t \\ y=1+t \\ z=1+3t. \end{cases}$$
Per calcolare il punto P' simmetrico di P rispetto a π_1 occorre determinare il punto $H=s\cap\pi_1$:
$$\begin{cases} x=2t \\ y=1+t \\ z=1+3t \\ 2x+y+3z+3=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t=-\dfrac{1}{2} \\ x=-1 \\ y=\dfrac{1}{2} \\ z=-\dfrac{1}{2}. \end{cases}$$
Quindi, $H=(-1,\frac{1}{2},-\frac{1}{2})$ e $P'=(a,b,c)$ è il simmetrico di P rispetto a H:
$$\begin{cases} \dfrac{a}{2}=-1 \\ \dfrac{b+1}{2}=\dfrac{1}{2} \\ \dfrac{c+1}{2}=-\dfrac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=-2 \\ b=0 \\ c=-2, \end{cases}$$
per cui $P'=(-2,0,-2)$.

2. Le coniche spezzate del fascio sono $AB\cup CD\colon\ y(y-1)=0$, $AC\cup BD\colon\ (x+2y-1)(x+4y-2)=0$ e $AD\cup BC\colon\ (x+3y-1)(x+3y-2)=0$, per possiamo dire che il fascio di coniche dato ha equazione:
$$hy(y-1)+(x+2y-1)(x+4y-2)=0 \Rightarrow x^2+6xy+(h+8)y^2-3x-(h+8)y+2=0.$$
La matrice associata è:
$$B=\begin{pmatrix} 1 & 3 & -\dfrac{3}{2} \\ 3 & h+8 & -\dfrac{h+8}{2} \\ -\dfrac{3}{2} & -\dfrac{h+8}{2} & 2 \end{pmatrix},$$
per cui $|B|=\frac{h-h^2}{4}$. Questo vuol dire che per $h\neq 0,1$ abbiamo coniche irriducibili, mentre per $h=0$ la conica spezzata che otteniamo è necessariamente $AC\cup BD$, mentre per $h=1$ la conica spezzata è quella rimanente, ovvero $AD\cup BC$.

Sia $h\neq 0,1$. Da:
$$\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & h+8 \end{vmatrix} = h-1$$

vediamo che per $h > 1$ abbiamo delle ellissi, tutte reali, in quanto i punti base sono reali; non vi sono circonferenze nel fascio; per $h = 1$ non abbiamo parabole, poiché abbiamo una conica spezzata; per $h < 1$, $h \neq 0$, abbiamo delle iperboli, tra le quali quella equilatera si ottiene per $h = -9$.

3. Le quadriche contenneti la circonferenza data hanno equazione:

$$x^2 + y^2 + 2x - 2 + z(ax + by + cz + d) = 0 \Rightarrow x^2 + y^2 + axz + byz + cz^2 + 2x + dz - 2 = 0.$$

La matrice associata è:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{a}{2} & 1 \\ 0 & 1 & \frac{b}{2} & 0 \\ \frac{a}{2} & \frac{b}{2} & c & \frac{d}{2} \\ 1 & 0 & \frac{d}{2} & -2 \end{pmatrix}.$$

Ricordando che le coordinate omogenee del vertice sono soluzione del sistema omogeneo associato alla matrice B, vediamo che per il cono, dovendo essere il vertice il punto $V_1 = (1, -1, 1)$, si ha:

$$\begin{cases} 1 + \frac{a}{2} + 1 = 0 \\ -1 + \frac{b}{2} = 0 \\ \frac{a}{2} - \frac{b}{2} + c + \frac{d}{2} = 0 \\ 1 + \frac{d}{2} - 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -4 \\ b = 2 \\ c = 2 \\ d = 2, \end{cases}$$

per cui il cono cercato ha equazione:

$$x^2 + y^2 - 4xz + 2yz + 2z^2 + 2x + 2z - 2 = 0.$$

Nella stessa maniera si procede per determinare il cilindro di vertice $V_2 = (0, 0, 1, 0)$. In questo caso si ottiene:

$$\begin{cases} \frac{a}{2} = 0 \\ \frac{b}{2} = 0 \\ c = 0 \\ \frac{d}{2} = 0, \end{cases}$$

per cui il cilindro cercato ha equazione:

$$x^2 + y^2 + 2x - 2 = 0.$$

4. Ricordiamo che l'iperbole è tangente a ciascuno dei suoi due asintoti nei loro punti impropri. Cerchiamo, dunque, il fascio di coniche tangenti alle due rette nei loro punti impropri:

$$(x + 2y - t)(3x - y + 2t) + ht^2 = 0 \to (x + 2y - 1)(3x - y + 2) + h = 0.$$

Imponendo il passaggio per $P = (1, 1)$ otteniamo facilmente che $h = -8$, per cui la conica cercata ha equazione:

$$(x + 2y - 1)(3x - y + 2) - 8 = 0 \Rightarrow 3x^2 + 5xy - 2y^2 - x + 5y - 10 = 0.$$

Il centro di simmetria dell'iperbole è intersezione dei due asintoti:

$$\begin{cases} x + 2y - 1 = 0 \\ 3x - y + 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -\frac{3}{7} \\ y = \frac{5}{7}. \end{cases}$$

Quindi, il centro di simmetria dell'iperbole è il punto $(-\frac{3}{7}, \frac{5}{7})$.