Corso di Laurea in Ingegneria Industriale (F-O) e (P-Z)

Prova di **Algebra lineare e Geometria** - Appello 12 Luglio 2023

Durata della prova: 3 ore.
È vietato uscire dall'aula prima di aver consegnato definitivamente il compito.
È vietato consultare libri o appunti.

I

Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'endomorfismo definito dall'assegnazione:

$$M(f) = \begin{pmatrix} 1 & h & 1 \\ h & 1 & 1 \\ -1 & 1 & h \end{pmatrix},$$

al variare di $h \in \mathbb{R}$.

1. **5 punti.** Studiare f, determinando in ciascun caso $\operatorname{Im} f$ e $\operatorname{Ker} f$ e le loro equazioni cartesiane.
2. **5 punti.** Studiare la semplicità di f nei casi $h = 0$ e $h = -2$, determinando, se possibile, una base di autovettori per f.
3. **5 punti.** Calcolare $f^{-1}(1, h, h)$ al variare di $h \in \mathbb{R}$.

Soluzione

1. Dal momento che $|M(f)| = h(1 - h^2)$, vediamo che per $h \neq 0, 1, -1$ l'endomorfismo f è un isomorfismo, per cui f è iniettiva e suriettiva e si ha $\operatorname{Im} f = \mathbb{R}^3$ e $\operatorname{Ker} f = \{(0,0,0)\}$.

   Sia $h = 0$. In tal caso:
$$M(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{riducendo}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$
   Dunque, si ha $\dim \operatorname{Im} f = \rho(M(f)) = 2$ e una sua base è $[(1,0,-1),(0,1,1)]$. Inoltre, da:
$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ x & y & z \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow x - y + z = 0$$
   vediamo che $\operatorname{Im} f = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - y + z = 0\}$. Inoltre, abbiamo $\dim \operatorname{Ker} f = 1$ e:
$$\operatorname{Ker} f = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - z = 0,\ y + z = 0\} = \mathscr{L}((1,-1,1)).$$
   Sia $h = 1$. In tal caso:
$$M(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{riducendo}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$
   Dunque, si ha $\dim \operatorname{Im} f = \rho(M(f)) = 2$ e una sua base è $[(1,1,-1),(1,1,1)]$. Inoltre, da:
$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow 2x - 2y = 0$$

vediamo che $\mathrm{Im} f = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x-y=0\}$. Inoltre, abbiamo $\dim \mathrm{Ker} f = 1$ e:

$$\mathrm{Ker} f = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x+y+z=0, 2y+2z=0\} = \mathscr{L}((0,1,-1)).$$

Sia $h=-1$. In tal caso:

$$M(f) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{riducendo}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dunque, si ha $\dim \mathrm{Im} f = \rho(M(f)) = 2$ e una sua base è $[(1,-1,-1),(1,1,-1)]$. Inoltre, da:

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ x & y & z \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow 2x+2z=0$$

vediamo che $\mathrm{Im} f = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x+z=0\}$. Inoltre, abbiamo $\dim \mathrm{Ker} f = 1$ e:

$$\mathrm{Ker} f = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x-y-z=0, 2z=0\} = \mathscr{L}((1,1,0)).$$

2. Sia $h=0$. In tal caso abbiamo:

$$P(T) = \begin{vmatrix} 1-T & 0 & 1 \\ 0 & 1-T & 1 \\ -1 & 1 & -T \end{vmatrix} = -T(1-T)^2,$$

per cui gli autovalori sono 0 e 1, con $m_0 = 1$ e $m_1 = 2$. Sappiamo che necessariamente deve essere $\dim V_0 = m_0 = 1$, per cui f è semplice se e solo se si ha $\dim V_1 = m_1 = 2$. Sia, perciò, $T=1$. Sappiamo che $V_1 = \mathrm{Ker} f_1$, dove $f_1 = f - i$ e:

$$M(f_1) = M(f) - I = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{riducendo}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dunque, $\dim V_1 = 3-2 = 1 < 2 = m_1$. Questo vuol dire che per $h=0$ f non è semplice e non è possibile, dunque, determinare una base di autovettori per f.

Sia $h=-2$. In tal caso:

$$P(T) = \begin{vmatrix} 1-T & -2 & 1 \\ -2 & 1-T & 1 \\ -1 & 1 & -2-T \end{vmatrix} = (-2-T)(T-3)(T+1).$$

Quindi, gli autovalori sono -2, -1 e 3, tutti distinti di molteplicità algebrica 1, per cui possiamo dire che f è certamente semplice.

Sia $T=-2$. Sappiamo che $V_{-2} = \mathrm{Ker} f_{-2}$, dove $f_{-2} = f + 2i$ e:

$$M(f_{-2}) = M(f) + 2I = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -2 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{riducendo}} \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -5 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Quindi:

$$V_{-2} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 3x-2y+z=0, -5x+5y=0\} = \mathscr{L}((1,1,-1)).$$

Sia $T=-1$. Sappiamo che $V_{-1} = \mathrm{Ker} f_{-1}$, dove $f_{-1} = f + i$ e:

$$M(f_{-1}) = M(f) + I = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ -2 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{riducendo}} \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Quindi:

$$V_{-1} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x-2y+z=0, 2z=0\} = \mathscr{L}((1,1,0)).$$

Sia $T=3$. Sappiamo che $V_{-1}=\operatorname{Ker} f_{-1}$, dove $f_{-1}=f+i$ e:

$$M(f_{-1})=M(f)+I=\begin{pmatrix} -2 & -2 & 1 \\ -2 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & -5 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{riducendo}} \begin{pmatrix} -2 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -11 & -9 & 0 \end{pmatrix}.$$

Quindi:

$$V_3=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid -2x-2y+z=0,\ -11x-9y=0\}=\mathscr{L}((-9,11,4)).$$

Quindi, una base di autovettori per f è $[(1,1,-1),(1,1,0),(-9,11,4)]$.

3. Per calcolare $f^{-1}(1,h,h)$ occorre risolvere il sistema la cui matrice completa associata è:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & h & 1 & 1 \\ h & 1 & 1 & h \\ -1 & 1 & h & h \end{array}\right) \xrightarrow{\text{riducendo, per } h\neq 1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & h & 1 & 1 \\ h-1 & 1-h & 0 & h-1 \\ -h^2-h & 0 & 0 & 1-h^2 \end{array}\right).$$

Vediamo subito che per $h\neq 0,1,-1$ abbiamo una sola soluzione:

$$\begin{cases} x+hy+z=1 \\ (h-1)x+(1-h)y=h-1 \\ (-h^2-h)x=1-h^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\dfrac{h-1}{h} \\ y=-\dfrac{1}{h} \\ z=\dfrac{h+1}{h}. \end{cases}$$

Quindi, per $h\neq 0,1,-1$ abbiamo:

$$f^{-1}(1,h,h)=\left\{\left(\frac{h-1}{h},-\frac{1}{h},\frac{h+1}{h}\right)\right\}.$$

Se $h=0$, la riduzione precedente ci porta a dire che il sistema è impossibile, per cui, in tal caso, abbiamo $f^{-1}(1,h,h)=f^{-1}(1,0,0)=\emptyset$.

Se $h=-1$, la matrice precedente diventa:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right),$$

per cui abbiamo ∞^1 soluzioni e abbiamo:

$$f^{-1}(1,h,h)=f^{-1}(1,-1,-1)=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x-y+z=1,\ -2x+2y=-2\}=\{(y+1,y,0)\in\mathbb{R}^3\}.$$

Sia $h=1$. In questo caso abbiamo:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{riducendo}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \end{array}\right),$$

per cui abbiamo ∞^1 soluzioni e abbiamo:

$$f^{-1}(1,h,h)=f^{-1}(1,1,1)=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x+y+z=1,\ 2y+2z=2\}=\{(0,y,1-y)\in\mathbb{R}^3\}.$$

II

1. **5 punti.** È assegnato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $O,\vec{x},\vec{y},\vec{z},u$. Sono dati i piani $\pi_1\colon x+y+2z+4=0$ e $\pi_2\colon 3x-y+z-1=0$, il punto $P=(-1,-1,0)$ e la retta $r\colon x=y-3=0$. Determinare la retta s passante per P e parallela ai piani π_1 e π_2 e la retta t passante per P e ortogonale e incidente la retta r.

2. **5 punti.** È assegnato nel piano un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $O, \vec{x}, \vec{y}, u$. Studiare il fascio di coniche di equazione:

$$x^2 + (2h+2)xy + hy^2 - 2x + 1 = 0,$$

al variare di $h \in \mathbb{R}$, determinandone, in particolare, punti base e coniche spezzate.

3. **5 punti.** È assegnato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}, u$. Studiare, al variare di $h \in \mathbb{R}$, le quadriche di equazione:

$$x^2 + (2h+2)xy + hy^2 + z^2 - 2x + 1 = 0.$$

4. **ESERCIZIO BONUS: 5 punti.** Data la conica:

$$\Gamma\colon \begin{cases} x^2 + hz^2 + 2xy - 1 = 0 \\ x + y + z = 0, \end{cases}$$

con $h \in \mathbb{R}$, determinare i valori di $h \in \mathbb{R}$ per i quali la conica Γ risulta essere un'ellisse.

Soluzione

1. La retta s è intersezione dei piani α e β passanti per P e paralleli, rispettivamente, ai piani π_1 e π_2. Si vede facilmente che $\alpha\colon x + y + 2z + 2 = 0$ e $\beta\colon 3x - y + z + 2 = 0$, per cui:

$$s = \alpha \cap \beta\colon \begin{cases} x + y + 2z + 2 = 0 \\ 3x - y + z + 2 = 0. \end{cases}$$

Il generico punto della retta r è $R = (0,3,a)$. La retta t cercata passa per P e per R, per un certo valore di a, per cui avrà parametri direttori $(1,4,a)$. Noi vogliamo che essa sia ortogonale alla retta r, che ha parametri direttori $(0,0,1)$. Questo vuol dire che deve essere $a = 0$, per cui la retta t è la retta passante per $R = (0,3,0)$ e per P, per cui:

$$t\colon \begin{cases} 4x - y + 3 = 0 \\ z = 0. \end{cases}$$

2. La conica nascosta del fascio è spezzata di equazione $y(2x + y) = 0$. Da:

$$\begin{pmatrix} 1 & h+1 & -1 \\ h+1 & h & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

vediamo che $|B| = -(h+1)^2$, per cui per $h = -1$ otteniamo l'altra conica spezzata del fascio:

$$x^2 - y^2 - 2x + 1 = 0 \Rightarrow (x-1)^2 - y^2 = 0 \Rightarrow (x + y - 1)(x - y - 1) = 0.$$

Quindi, i punti base del fascio sono dati da:

$$\begin{cases} y(2x + y) = 0 \\ (x + y - 1)(x - y - 1) = 0, \end{cases}$$

per cui troviamo il punto $(1,0)$, contato due volte, e i punti $(-1,2)$ e $(\frac{1}{3}, -\frac{2}{3})$.
Per $h \neq -1$ le coniche del fascio sono irriducibili. Da:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & h+1 \\ h+1 & h \end{vmatrix} = -h^2 - h - 1$$

vediamo che esse sono tutte delle iperboli, nessuna delle quali è equilatera.

3. Osserviamo che:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & h+1 & 0 & -1 \\ h+1 & h & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

e che

$$A = \begin{pmatrix} 1 & h+1 & 0 \\ h+1 & h & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Quindi, $|B| = -(h+1)^2$ e $|A| = -h^2 - h - 1$. Questo vuol dire che per $h = -1$ abbiamo un cono, mentre per $h \neq -1$ le quadriche possono essere ellissoidi o iperboloidi ellittici. Tuttavia, osserviamo, che per $h \neq -1$ l'intersezione della quadrica con il piano $z = 0$ coincide con la conica del fascio studiata nel punto precedente, che è un'iperbole per $h \neq -1$. Quindi, per $h \neq -1$ la quadrica contiene certamente un'iperbole. Questo vuol dire che non può essere un'ellissoide e, dunque, è un iperboloide ellittico.

4. Osserviamo che:

$$\begin{cases} y = -x - z \\ x^2 + hz^2 + 2xy - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -x^2 - 2xz + hz^2 - 1 = 0 \\ y = -x - z. \end{cases}$$

La quadrica $Q\colon -x^2 - 2xz + hz^2 - 1 = 0$ ha matrici associate:

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & h & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & h \end{pmatrix},$$

per cui è facile vedere che per $h = -1$ essa è spezzata. Quindi, possiamo dire che Γ è spezzata per $h = -1$. Invece, per $h \neq -1$, è semplice vedere che la quadrica Q è un cilindro di vertice $V = (0,1,0,0)$, che non appartiene al piano $\pi\colon x + y + z = 0$. Ciò vuol dire che $\Gamma = Q \cap \pi$ è una conica irriducibile per $h \neq -1$. Per stabilirne la natura occorre determinarne i punti impropri:

$$\begin{cases} y = -x - z \\ -x^2 - 2xz + hz^2 - t^2 = 0 \\ t = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = -x - z \\ -x^2 - 2xz + hz^2 = 0 \\ t = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = -x - z \\ -\dfrac{x^2}{z^2} - 2\dfrac{x}{z} + h = 0 \\ t = 0. \end{cases}$$

L'equazione di secondo grado:

$$-\frac{x^2}{z^2} - 2\frac{x}{z} + h = 0$$

in $\frac{x}{z}$ ha $\frac{\Delta}{4} = 1 + h$. Per avere delle ellissi vogliamo che sia $\frac{\Delta}{4} < 0$, ovvero $h < -1$. Quindi, possiamo affermare che per $h < -1$ la conica Γ è un'ellisse.