Corso di Laurea in
Ingegneria Industriale

Prova scritta di **Algebra lineare e Geometria**- 7 Settembre 2022

Durata della prova: 1 ora e 30.
È vietato uscire dall'aula prima di aver consegnato definitivamente il compito.
È vietato consultare libri o appunti.

I

Sia $V = \mathcal{L}(v_1, v_2, v_3) \subset \mathbb{R}^4$, essendo $v_1 = (1,0,1,1)$, $v_2 = (0,1,0,0)$ e $v_3 = (0,0,1,-1)$. È data l'applicazione lineare $f : V \to \mathbb{R}^3$ definita da:

$$\begin{aligned} f(v_1) &= (1,h,1) \\ f(v_2) &= (-1,1,1) \\ f(v_3) &= (-h,-1,1), \end{aligned}$$

con $h \in \mathbb{R}$.

1. Studiare f al variare di $h \in \mathbb{R}$, determinando in ciascun caso $\operatorname{Im} f$ e $\operatorname{Ker} f$. Determinare il valore di $h \in \mathbb{R}$ per il quale $\operatorname{Ker} f = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid 2x + y = 0,\, 2x - z = 0, t = 0\}$.
2. Diagonalizzare la matrice
$$B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -h \\ h & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$
se possibile, nei casi in cui 1 è autovalore per B.

Soluzione

1. È immediato vedere che:
$$M^{\mathcal{A},\mathcal{E}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -h \\ h & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$
per cui $|M^{\mathcal{A},\mathcal{E}}(f)| = -h^2 + 2h + 3$. Ciò significa che per $h \neq 3, -1$, f è un isomorfismo, cioè è iniettiva e suriettiva, e si ha $\operatorname{Ker} f = \{(0,0,0,0)\}$ e $\operatorname{Im} f = \mathbb{R}^3$.
Sia $h = 3$. In tal caso:
$$M^{\mathcal{A},\mathcal{E}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -3 \\ 3 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{riducendo}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -3 \\ 4 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$
Dunque, si ha $\dim \operatorname{Im} f = \rho(M^{\mathcal{A},\mathcal{E}}(f)) = 2$ e una sua base è data da $[(1,3,1),(-1,1,1)]$. Inoltre, $\dim \operatorname{Ker} f = \dim V - \dim \operatorname{Im} f = 1$ e:
$$\begin{aligned} \operatorname{Ker} f &= \{v \in V \mid [v]_{\mathcal{A}} = (a,b,c),\, a - b - 3c = 0,\, 4a - 4c = 0\} = \\ &= \{v \in V \mid [v]_{\mathcal{A}} = (a,-2a,a)\} = \mathcal{L}(v_1 - 2v_2 + v_3) = \mathcal{L}((1,-2,2,0)). \end{aligned}$$
È immediato vedere che per questo valore di h, ovvero $h = 3$, si ha che $\operatorname{Ker} f$ coincide con il sottospazio richiesto, in quanto si ha che $(1,-2,2,0) \in \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid 2x + y = 0,\, 2x - z = 0,\, t = 0\}$ e i

due sottospazi $\operatorname{Ker} f$ e $\{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid 2x + y = 0,\ 2x - z = 0,\ t = 0\}$ hanno entrambi dimensione pari a 1.

Sia $h = -1$. In tal caso:

$$M^{\mathcal{A},\mathcal{E}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{riducendo}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dunque, si ha $\dim \operatorname{Im} f = \rho(M^{\mathcal{A},\mathcal{E}}(f)) = 2$ e una sua base è data da $[(1, -1, 1), (-1, 1, 1)]$. Inoltre, $\dim \operatorname{Ker} f = \dim V - \dim \operatorname{Im} f = 1$ e:

$$\begin{aligned} \operatorname{Ker} f = \{v \in V \mid [v]_{\mathcal{A}} = (a, b, c),\ a - b + c = 0,\ 2b = 0\} = \\ = \{v \in V \mid [v]_{\mathcal{A}} = (a, 0, -a)\} = \mathcal{L}(v_1 - v_3) = \mathcal{L}((1, 0, 0, 2)). \end{aligned}$$

È evidente che in questo caso non si ha l'uguglianza richiesta.

2. Dato che $B = M^{\mathcal{A},\mathcal{E}}(f)$, per imporre che 1 sia autovalore per B dobbiamo imporre che:

$$|B - I| = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 1-1 & -1 & -h \\ h & 1-1 & -1 \\ 1 & 1 & 1-1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow 1 - h^2 = 0 \Leftrightarrow h = \pm 1.$$

Sia $h = 1$. In questo caso:

$$|B - TI| = \begin{vmatrix} 1-T & -1 & -1 \\ 1 & 1-T & -1 \\ 1 & 1 & 1-T \end{vmatrix} = (1 - T)(T^2 - 2T + 4),$$

per cui l'unico autovalore per B è 1 cn $m_1 = 1$, per cui certamente B non è diagonalizzabile.

Sia $h = -1$. In tal caso:

$$|B - TI| = \begin{vmatrix} 1-T & -1 & 1 \\ -1 & 1-T & -1 \\ 1 & 1 & 1-T \end{vmatrix} = -T(T - 1)(T - 2).$$

Ciò vuol dire che in questo caso gli autovalori sono $0, 1, 2$, tutti di molteplicità algebrica pari a 1, per cui B è certamente diagonalizzabile.

Dai calcoli fatti nel punto precedente risulta chiaro che $V_0 = \mathcal{L}((1, 0, -1))$. Sia $T = 1$. In tal caso:

$$B - I = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{riducendo}} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

per cui:

$$V_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid y + z = 0,\ -x - z = 0\} = \mathcal{L}((1, -1, -1)).$$

Sia $T = 2$. . In tal caso:

$$B - 2I = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{riducendo}} \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

per cui:

$$V_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid -x - y + z = 0,\ 2z = 0\} = \mathcal{L}((1, -1, 0)).$$

Quindi, possiamo dire che una base di autovettori è $[(1, 0, -1), (1, -1, -1), (1, -1, 0)]$ e che$P^{-1}BP = D$, essendo:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

II

1. È assegnato nel piano un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $O, \vec{x}, \vec{y}, u$. Studiare il fascio di coniche di equazione:
$$x^2 + 2hxy + y^2 - 2x + 1 = 0,$$
determinandone, in particolare, punti base e coniche spezzate.

2. È assegnato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}, u$. Studiare, al variare di $h \in \mathbb{R}$, le quadriche di equazione:
$$x^2 + 2hxy - hy^2 + 2xz + z^2 - 1 = 0.$$

Soluzione

1. La conica nascosta del fascio è la conica spezzata di equazione $xy = 0$. Dato che:
$$B = \begin{pmatrix} 1 & h & -1 \\ h & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$
abbiamo $|B| = -h^2$, per cui l'altra conica spezzata del fascio è ottenuta per $h = 0$, mentre per $h \neq 0$ le coniche sono tutte irriducibili. Per $h = 0$ la conica ha equazione:
$$x^2 + y^2 - 2x + 1 = 0 \Rightarrow (x-1)^2 + y^2 = 0 \Rightarrow [(x-1) + iy][(x-1) - iy] = 0.$$
Possiamo determinare i punti base:
$$\begin{cases} (x-1)^2 + y^2 = 0 \\ xy = 0, \end{cases}$$
da cui abbiamo i punti $(0, i)$, $(0, -i)$ e $(1, 0)$, quest'ultimo contato due volte. Inoltre, da:
$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & h \\ h & 1 \end{vmatrix} = 1 - h^2$$
vediamo che per $h = \pm 1$ abbiamo delle parabole, per $-1 < h < 1$, $h \neq 0$ abbiamo delle ellissi reali, in quanto almeno uno dei punti base è reale; l'unica circonferenza del fascio è quella di raggio nullo ottenuta per $h = 0$; per $h < -1$ e $h > 1$ abbiamo delle iperboli, nessuna delle quali è equilatera.

2. Le matrici associate alle quadriche sono:
$$B = \begin{pmatrix} 1 & h & 1 & 0 \\ h & -h & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & h & 1 \\ h & -h & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$
per cui $|B| = h^2$ e $|A| = -h^2$. Per $h = 0$ abbiamo $|B| = |A| = 0$ e, essendo $\rho(B) = 2$, vuol dire che per $h = 0$ abbiamo una quadrica spezzata.

Sia $h \neq 0$. In questo caso, si ha $|B| > 0$ e $|A| \neq 0$, per cui le quadriche sono iperboloidi o ellissoidi. Dato che:
$$P_A(T) = \begin{vmatrix} 1-T & h & 1 \\ h & -h-T & 0 \\ 1 & 0 & 1-T \end{vmatrix} = -T^3 + (2-h)T^2 + (h^2 + 2h)T - h^2,$$
vediamo che otteniamo degli ellissoidi nei casi in cui si abbia:
$$\begin{cases} 2 - h < 0 \\ h^2 + 2h < 0 \\ -h^2 < 0 \end{cases}$$

oppure

$$\begin{cases} 2 - h > 0 \\ h^2 + 2h < 0 \\ -h^2 > 0. \end{cases}$$

Entrambi i sistemi sono impossibili, per cui per $h \neq 0$ abbiamo degli iperboloidi iperbolici, in quanto $|B| > 0$.