Corso di Laurea in
Ingegneria Informatica (tutti i canali), Ingegneria Elettronica (tutti i canali)
Ingegneria Industriale (A-E, F-O)

Prova di **Algebra lineare e Geometria**- Appello 29 Aprile 2022

Durata della prova: 90 minuti.
È vietato uscire dall'aula prima di aver consegnato definitivamente il compito.
È vietato consultare libri o appunti.

I

1. È assegnato l'endomorfismo $f\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ definito da:

$$f(x,y,z,t) = ((h+2)x + 6y + 2z + 8t, y, -8y - z - 18t, (h+1)t), \quad \forall (x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4,$$

al variare di $h \in \mathbb{R}$. Studiare f, al variare di $h \in \mathbb{R}$, determinando in ciascun caso $\operatorname{Im} f$, $\operatorname{Ker} f$ e le loro equazioni cartesiane.

2. Nel caso $h = 0$ diagonalizzare la matrice $M(f)$ associata ad f rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^4$.

Soluzione

1. È immediato vedere che:

$$M(f) = \begin{pmatrix} h+2 & 6 & 2 & 8 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -8 & -1 & -18 \\ 0 & 0 & 0 & h+1 \end{pmatrix},$$

per cui $|M(f)| = -(h+2)(h+1)$. Ciò significa che per $h \neq -2, -1$ f è un isomorfismo, ovvero è iniettiva e suriettiva, il che implica che $\operatorname{Ker} f = \{(0,0,0,0)\}$ e $\operatorname{Im} f = \mathbb{R}^4$.

Sia $h = -2$. In tal caso:

$$M(f) = \begin{pmatrix} 0 & 6 & 2 & 8 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -8 & -1 & -18 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{riducendo}} \begin{pmatrix} 0 & 6 & 2 & 8 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -14 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dunque, $\dim \operatorname{Im} f = 3$ e una sua base è $[(6,1,-8,0),(2,0,-1,0),(8,0,-18,-1)]$. La sua equazione cartesiana è data da:

$$\begin{pmatrix} 6 & 1 & -18 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & 0 \\ 8 & 0 & -18 & -1 \\ x & y & z & t \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{riducendo}} \begin{pmatrix} 6 & 1 & -8 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & 0 \\ -28 & 0 & 0 & -1 \\ x+10y+2z-28t & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

per cui:

$$\operatorname{Im} f = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + 10y + 2z - 28t = 0\}.$$

Inoltre, $\dim \operatorname{Ker} f = 1$ e:

$$\operatorname{Ker} f = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid 6y + 2z + 8t = 0,\ y = 0,\ -14t = 0\} = \mathcal{L}((1,0,0,0)),$$

il che si poteva evincere anche dal fatto che $\dim \operatorname{Ker} f = 1$ e che la prima colonna di $M(f)$ è tutto nulla, ovvero che $f(e_1) = (0,0,0,0)$.

Sia $h = -1$. In tal caso:

$$M(f) = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 2 & 8 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -8 & -1 & -18 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{riducendo}} \begin{pmatrix} 1 & 6 & 2 & 8 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -18 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dunque, $\dim \operatorname{Im} f = 3$ e una sua base è $[(1,0,0,0)(6,1,-8,0),(2,0,-1,0)]$. La sua equazione cartesiana è data da:

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 1 & -18 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & 0 \\ x & y & z & t \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow -t = 0$$

per cui:

$$\operatorname{Im} f = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid t = 0\}.$$

Inoltre, $\dim \operatorname{Ker} f = 1$ e:

$$\operatorname{Ker} f = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + 6y + 2z + 8t = 0,\ y = 0,\ -z - 18t = 0\} = \mathcal{L}((28,0,-18,1)).$$

2. Sia $h = 0$. In tal caso:

$$M(f) = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 2 & 8 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -8 & -1 & -18 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

e

$$P(T) = \begin{vmatrix} 2-T & 6 & 2 & 8 \\ 0 & 1-T & 0 & 0 \\ 0 & -8 & -1-T & -18 \\ 0 & 0 & 0 & 1-T \end{vmatrix} = (1-T)^2(-1-T)(2-T).$$

Quindi, gli autovalori sono $1, -1, 2$, con $m_{-1} = m_2 = 1$ e $m_1 = 2$. Necessariamente si ha $\dim V_{-1} = m_{-1} = 1$ e $\dim V_2 = m_2 = 1$, mentre $1 \leq \dim V_1 \leq m_1 = 2$. Dunque, f è semplice e, conseguentemente $M(f)$ è diagonalizzabile, se $\dim V_1 = m_1 = 2$.

Sia, dunque, $T = 1$. In tal caso, $V_1 = \operatorname{Ker} f_1$, dove $f_1 = f - i$ e:

$$M(f_1) = M(f) - I = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 2 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -8 & -2 & -18 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

per cui $\dim V_1 = 4 - \rho(M(f_1)) = 4 - 2 = 2 = m_1$. Ciò vuol dire che f è semplice e $M(f)$ è diagonalizzabile. Inoltre:

$$\begin{aligned} V_1 = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + 6y + 2z + 8t = 0,\ -8y - 2z - 18t = 0\} = \\ = \{(2y + 10t, y, -4y - 9t, t) \in \mathbb{R}^4\} = \mathcal{L}((2,1,-4,0),(10,0,-9,1)). \end{aligned}$$

Sia $T = -1$. In tal caso, $V_{-1} = \operatorname{Ker} f_{-1} = f + i$, dove $f_{-1} = f + i$ e:

$$M(f_{-1}) = M(f) + I = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 2 & 8 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -8 & 0 & -18 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{riducendo}} \begin{pmatrix} 3 & 6 & 2 & 8 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -18 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

per cui:

$$V_{-1} = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid 3x + 6y + 2z + 8t = 0,\ 2x = 0,\ -18t = 0\} = \mathcal{L}((2,0,-3,0)).$$

Sia $T = 2$. In tal caso, $V_2 = \operatorname{Ker} f_2$, dove $f_2 = f - 2i$ e:

$$M(f_2) = M(f) - 2I = \begin{pmatrix} 0 & 6 & 2 & 8 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -8 & -3 & -18 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{riducendo}} \begin{pmatrix} 0 & 6 & 2 & 8 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

per cui:

$$V_2 = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid 6y + 2z + 8t = 0,\ -y = 0,\ -6t = 0\} = \mathcal{L}((1, 0, 0, 0)),$$

cosa che si poteva evincere dal fatto che necessariamente doveva essere $\dim V_2 = 1$ e che guardando la prima colonna di $M(f)$ si ha $f(e_1) = 2e_1$.

In conclusione, una base di autovettori è $[(2, 1, -4, 0), (10, 0, -9, 1), (2, 0, -3, 0), (1, 0, 0, 0)]$ e possiamo dire che $P^{-1}M(f)P = D$, dove:

$$P = \begin{pmatrix} 2 & 10 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ -4 & -9 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

II

1. È assegnato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}, u$. Sono dati la retta:
$$r\colon \begin{cases} x - y + 2z + 1 = 0 \\ x + y - 4z + 2 = 0 \end{cases}$$
e il piano $\pi\colon x - z = 0$. Determinare l'equazione del piano α passante per l'origine O, parallelo alla rette r e ortogonale al piano π.

2. È assegnato nel piano un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $O, \vec{x}, \vec{y}, u$. Studiare il fascio di coniche di equazione:
$$(2 - k)x^2 + (4k - 2)xy + ky^2 + 2x + 2ky + k = 0,$$
determinandone, in particolare, punti base e coniche spezzate e specificando i valori del parametro per i quali si ottengono ellissi, iperboli e parabole.

Soluzione

1. È facile vedere che la retta r ha parametri direttori $(1, 3, 1)$, per cui, se (a, b, c) sono le componenti di un vettore ortogonale al piano α, deve essere:
$$\begin{cases} a + 3b + c = 0 \\ a - c = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c = a \\ \\ b = -\dfrac{2}{3}a. \end{cases}$$
Quindi, un vettore ortogonale al piano cercato è quello di componenti $(3, -2, 3)$ e si ha:
$$\alpha\colon 3x - 2y + 3z = 0.$$

2. Cominciamo osservando che la conica nascosta ha equazione:
$$-x^2 + 4xy + y^2 + 2y + 1 = 0,$$
la quale, come si verifica facilmente, è un'iperbole equilatera. Le matrici associate al fascio di coniche sono:
$$B = \begin{pmatrix} 2 - k & 2k - 1 & 1 \\ 2k - 1 & k & k \\ 1 & k & k \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad A = \begin{pmatrix} 2 - k & 2k - 1 \\ 2k - 1 & k \end{pmatrix}.$$

Essendo $|B| = -4k(k-1)^2$, vediamo che le coniche spezzate del fascio si ottengono per $k = 0$ e $k = 1$, mentre per $k \neq 0, 1$ sono irriducibili. In particolare, per $k = 0$ abbiamo la conica di equazione $x(x - y + 1) = 0$ e per $k = 1$ quella di equazione $(x + y + 1)^2 = 0$. Dunque, i punti base sono dati da:

$$\begin{cases} x(x-y+1) = 0 \\ (x+y+1)^2 = 0, \end{cases}$$

cioè sono i punti $(0, -1)$ e $(-1, 0)$, entrambi contati due volte.

Essendo $|A| = -5k^2 + 6k - 1$, vediamo che per $\frac{1}{5} < k < 1$ abbiamo delle ellissi, tra le quali non figurano circonferenze; per $k = \frac{1}{5}$ abbiamo una parabola, mentre per $k = 1$ abbiamo una conica spezzata; per $k < \frac{1}{5}$, $k \neq 0$, e $k > 1$ abbiamo delle iperboli, nessuna delle quali è equilatera, per cui l'unica iperbole equilatera del fascio è la conica nascosta.