Corso di Laurea in
Ingegneria Informatica e Ingegneria Elettronica

Prova di **Algebra lineare e Geometria**- Appello 28 Settembre 2022

Durata della prova: 90 minuti.
È vietato uscire dall'aula prima di aver consegnato definitivamente il compito.
È vietato consultare libri o appunti.

I

1. Sia $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'endomorfismo definito dall'assegnazione:

$$M^{\mathcal{A}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ h & -h & -h-1 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix},$$

essendo $\mathcal{A} = [v_1, v_2, v_3]$ e $v_1 = (1,0,1)$, $v_2 = (0,1,0)$ e $v_3 = (0,0,1)$. Studiare la semplicità di f al variare di $h \in \mathbb{R}$, determinando, ove possibile, una base di autovettori per f.

2. Sono dati in $\mathbb{R}^4$ i sottospazi $U = \mathcal{L}((1,0,1,-1),(0,-h,-1,1))$, con $h \in \mathbb{R}$, e $W = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid x - t = 0,\ y - 2z = 0\}$. Calcolare $U \cap W$ e $U + W$ al variare di $h \in \mathbb{R}$, specificando se la somma è diretta o meno.

Soluzione

1. Dato che:

$$P(T) = \begin{vmatrix} 1-T & 0 & 0 \\ h & -h-T & -h-1 \\ 0 & -2 & -1-T \end{vmatrix} = (1-T)[T^2 + (h+1)T - h - 2] = (1-T)^2(-h-2-T),$$

vediamo che per $h \neq -3$ gli autovalori sono 1 e $-h-2$, con $m_1 = 2$ e $m_{-h-2} = 1$. Invece, per $h = -3$ l'unico autovalore è 1, con $m_1 = 3$. Dunque, per $h \neq -3$ f è semplice se $\dim V_1 = m_1 = 2$, mentre per $h = -3$ f è semplice se $\dim V_1 = m_1 = 3$. Andiamo, dunque, a calcolare $\dim V_1$ al variare di $h \in \mathbb{R}$. Sappiamo che $V_1 = \operatorname{Ker} f_1$, essendo $f_1 = f - i$ e:

$$M^{\mathcal{A}}(f_1) = M^{\mathcal{A}}(f) - I = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ h & -h-1 & -h-1 \\ 0 & -2 & -2 \end{pmatrix}.$$

È chiaro, allora, che $\rho(M^{\mathcal{A}}(f_1)) = 2$ per $h \neq 0$, mentre è immediato vedere che per $h = 0$ si ha $\rho(M^{\mathcal{A}}(f_1)) = 1$. Ciò significa che per $h \neq 0$ si ha $\dim V_1 = 1$, mentre per $h = 0$ si ha $\dim V_1 = 2$. Per quanto detto in precedenza, questo vuol dire che f è semplice solo per $h = 0$. Sia, dunque, $h = 0$ e determiniamo una base di autovettori per f. Dalla matrice precedente vediamo che, essendo $h = 0$, si ha:

$$\begin{aligned} V_1 = \{v \in \mathbb{R}^3 \mid [v]_{\mathcal{A}} = (a,b,c),\ -b-c = 0\} = \{v \in V \mid [v]_{\mathcal{A}} = (a,b,-b)\} = \\ = \mathcal{L}(v_1, v_2 - v_3) = \mathcal{L}((1,0,1),(0,1,-1)). \end{aligned}$$

Sia, poi, $T = -2$ (sempre nel caso $h = 0$). Sappiamo che $V_2 = \operatorname{Ker} f_2$, dove $f_2 = f - 2i$ e:

$$M^{\mathcal{A}}(f_2) = M^{\mathcal{A}}(f) - 2I = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Dunque:

$$V_2 = \{v \in V \mid [v]_{\mathcal{A}} = (a,b,c),\ -a = 0,\ 2b - c = 0\} = \{v \in V \mid [v]_{\mathcal{A}} = (0,b,2b)\} =$$
$$= \mathcal{L}(v_2 + 2v_3) = ((0,1,2)).$$

Dunque, nel caso $h = 0$ una base di autovettori per f è $[(1,0,1),(0,1,-1),(0,1,2)]$.

2. Osserviamo che $\dim U = \dim W = 2$ per ogni $h \in \mathbb{R}$. Inoltre, è evidente che $W = \mathcal{L}((1,0,0,1),(0,2,1,0))$, per cui:
$$U + W = \mathcal{L}((1,0,0,1),(0,2,1,0),(1,0,1,-1),(0,-h,-1,1)).$$
Per determinare la dimensione di $U + W$ consideriamo:
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -h & -1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{riducendo}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & 1-h & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$
Quindi, per $h \neq 1$, abbiamo che $\dim(U+W) = 4$, il che vuol dire che $U + W = \mathbb{R}^4$. Inoltre:
$$\dim(U \cap W) = \dim U + \dim W - \dim(U+W) = 2 + 2 - 4 = 0 \Rightarrow U \cap W = \{(0,0,0,0\}.$$
Ciò significa che per $h \neq 1$ si ha che $U \oplus W = \mathbb{R}^4$.
Sia, invece, $h = 1$. In tal caso, dalla riduzione precedente vediamo che $\dim(U+W) = 3$ e che una sua base è data da $[(1,0,0,1)],(0,2,1,0),(0,-2,0,-2)]$. Inoltre:
$$\dim(U \cap W) = \dim U + \dim W - \dim(U+W) = 2 + 2 - 3 = 1,$$
per cui per $h = 1$ la somma non è più diretta. Inoltre, da:
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \\ x & y & z & t \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{riducendo}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -x-y+z & x+y+t \end{pmatrix}$$
vediamo che:
$$U = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid -x-y+z = 0,\ x+y+t = 0\}.$$
Quindi:
$$U \cap W = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid -x-y+z = 0,\ x+y+t = 0,\ x-t = 0, y-2z = 0\} = \mathcal{L}((-1,2,1,-1)).$$

II

1. È assegnato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}, u$. Sono dati i piani $\pi_1\colon x - z + 1 = 0$ e $\pi_2\colon x + y + 2z - 3 = 0$ e il punto $P = (1,1,-1)$. Determinare la retta r passante per P e parallela ai piani π_1 e π_2 e il punto P' proiezione ortogonale di P su π_1.

2. È assegnato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}, u$. Classificare al variare di $h \in \mathbb{R}$ le quadriche di equazione:
$$x^2 - 2hxy + z^2 - 2hx + y = 0.$$

Soluzione

1. La retta r è intersezione dei piani α_1 e α_2 passanti per P e paralleli, rispettivamente, a π_1 e π_2. Il piano α_1 è del tipo:
$$x - z + k = 0.$$

Imponendo il passaggio per $P = (1, 1, -1)$ otteniamo $k = -2$, cioè $\alpha_1 \colon x - z - 2 = 0$. Similarmente, il piano α_2 è del tipo $x + y + 2z + k = 0$. Quando imponiamo il passaggio per P otteniamo $k = 0$, per cui $\alpha_2 \colon x + y - 2z = 0$ e:

$$r \colon \begin{cases} x - z - 2 = 0 \\ x + y - 2z = 0. \end{cases}$$

Per determinare P' occorre la retta s passante per P e ortogonale al piano π_1:

$$s \colon \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 \\ z = -1 - t. \end{cases}$$

Il punto P' è l'intersezione di π_1 con la retta s:

$$P' = s \cap \pi_1 \colon \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 \\ z = -1 - t \\ x - z + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 \\ z = -1 - t \\ 1 + t + 1 + t + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t = -\dfrac{3}{2} \\ x = -\dfrac{1}{2} \\ y = 1 \\ z = \dfrac{1}{2}. \end{cases}$$

Quindi, $P' = (-\frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2})$.

2. Le matrici associate sono:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -h & 0 & -h \\ -h & 0 & 0 & \dfrac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -h & \dfrac{1}{2} & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ e } A = \begin{pmatrix} 1 & -h & 0 \\ -h & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Dato che $|B| = \frac{4h^2-1}{4}$ e $|A| = -h^2$, possiamo dire subito che per $h = \pm\frac{1}{2}$ abbiamo due coni, mentre per $h = 0$ abbiamo un paraboloide ellittico. Per $h \neq \pm\frac{1}{2}, 0$ abbiamo iperboloidi o ellissoidi. Per stabilirlo, calcoliamo il polinomio caratteristico di A:

$$P_A(T) = \begin{vmatrix} 1 - T & -h & 0 \\ -h & -T & 0 \\ 0 & 0 & 1 - T \end{vmatrix} = (1 - T)(T^2 - T - h^2).$$

Per la regola dei segni di Cartesio gli autovalori non sono concordi per alcun valore di h, per cui possiamo dire che per $h \neq \pm\frac{1}{2}, 0$ le quadriche sono tutte iperboloidi. In particolare, per $-\frac{1}{2} < h < \frac{1}{2}$, $h \neq 0$ abbiamo degli iperboloidi ellittici, mentre per $h < -\frac{1}{2}$ e per $h > \frac{1}{2}$ abbiamo degli iperboloidi iperbolici.