Corso di Laurea in
Ingegneria Industriale

Prova scritta di **Algebra lineare e Geometria**- 28 Giugno 2022

Durata della prova: 1 ora e 30.

È vietato consultare libri o appunti.

I

In $\mathbb{R}^4$ siano $v_1 = (-1, 0, 0, 0), v_2 = (0, -1, 0, 0), v_3 = (0, 0, 1, 0)$ e $V = \mathscr{L}(v_1, v_2, v_3)$. È dato l'endomorfismo $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ definito attraverso le immagini della base $< v_1, v_2, v_3, v_4 = (0, 0, 0, 1) >$ da:

$$\begin{aligned} f(v_1) &= (-h, 0, 1, 0) \\ f(v_2) &= (0, -2, 0, 0) \\ f(v_3) &= (h, 0, -1, 0) \\ f(v_4) &= (-1, -1, 1, 1), \end{aligned}$$

con $h \in \mathbb{R}$.

1. Dire perché f induce un endomorfismo f' da V in V per ogni valore di h. Fare uno studio completo al variare di h della semplicità di f'.
2. Dire se esiste e nel caso esista trovare un endomorfismo $g : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ non identicamente nullo tale che $g \circ f$ sia l'endomorfismo identicamente nullo.

Soluzione

1. Da:

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ x & y & z & t \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{riducendo}} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & t \end{pmatrix}$$

è evidente che:

$$V = \left\{ (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid t = 0 \right\}.$$

Essendo, poi:

$$f(V) = \mathcal{L}(f(v_1), f(v_2), f(v_3)) = \mathcal{L}((-h, 0, 1, 0), (0, -2, 0, 0), (h, 0, -1, 0))$$

ed essendo chiaro che $(-h, 0, 1, 0), (0, -2, 0, 0), (h, 0, -1, 0) \in V$, si ha $f(V) \subseteq V$ per ogni $h \in \mathbb{R}$. Ciò vuol dire che $f|_V$ induce un endomorfismo $f' \colon V \to V$.

Sia $\mathcal{A} = [v_1, v_2, v_3]$ una base di V. Essendo:

$$f'(v_1) = f(v_1) = (-h, 0, 1, 0) = hv_1 + v_3 \Rightarrow [f(v_1)]_{\mathcal{A}} = (h, 0, 1),$$

$$f'(v_2) = f(v_2) = (0, -2, 0, 0) = 2v_2 \Rightarrow [f(v_2)]_{\mathcal{A}} = (0, 2, 0),$$

$$f'(v_3) = f(v_3) = (h, 0, -1, 0) = -hv_1 - v_3 \Rightarrow [f(v_3)]_{\mathcal{A}} = (-h, 0, -1),$$

si ha:

$$M^{\mathcal{A}}(f') = \begin{pmatrix} h & 0 & -h \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Dunque:

$$P(T) = \begin{vmatrix} h-T & 0 & -h \\ 0 & 2-T & 0 \\ 1 & 0 & -1-T \end{vmatrix} = (2-T)[T^2-(h-1)T],$$

per cui gli autovalori sono $0, 2, h-1$. Per $h \neq 1, 3$ f' è semplice, in quanto tutti gli autovalori sono di molteplicità algebrica 1.

Sia $h = 1$. In tal caso, abbiamo che gli autovalori sono 0 e 2, con $m_0 = 2$ e $m_2 = 1$. Dovendo essere necessariamente $\dim V_2 = m_2 = 1$, f' sarà semplice se $\dim V_0 = m_0 = 2$. Sappiamo che $V_0 = \operatorname{Ker} f'$ e, essendo $\rho(M^{\mathcal{A}}(f')) = 2$ per $h = 1$ (come si può facilmente verificare), ne segue che:

$$\dim V_0 = \dim \operatorname{Ker} f' = \dim V - \rho(M^{\mathcal{A}}(f')) = 3 - 2 = 1 < 2 = m_0.$$

Ciò vuol dire che per $h = 1$ f' non è semplice.

Sia $h = 3$. In tal caso gli autovalori sono 0 e 2, con $m_0 = 1$ e $m_2 = 2$. In tal caso, si ha che necessariamente $\dim V_0 = m_0 = 1$, mentre $1 \leq \dim V_2 \leq 2 = m_2$ e f' sarà semplice se $\dim V_2 = m_2 = 2$. Sappiamo che $V_2 = \operatorname{Ker} f'_2$, dove $f'_2 = f' - 2i$ e:

$$M^{\mathcal{A}}(f') = M^{\mathcal{A}}(f') - 2I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -3 \end{pmatrix}.$$

Chiaramente si ha $\rho(M^{\mathcal{A}}(f')) = 1$, per cui $\dim V_2 = 3 - 1 = 2 = m_2$. Ciò significa che per $h = 3$ l'endomorfismo f' è semplice.

2. Un'applicazione lineare $g \colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ tale che $g \circ f$ sia l'applicazione identicamente nulla è tale che:

$$(g \circ f)(v_1) = (0,0,0,0) \Rightarrow g(f(v_1)) = g(-h,0,1,0) = (0,0,0,0),$$
$$(g \circ f)(v_2) = (0,0,0,0) \Rightarrow g(f(v_2)) = g(0,-2,0,0) = (0,0,0,0),$$
$$(g \circ f)(v_3) = (0,0,0,0) \Rightarrow g(f(v_3)) = g(h,0,-1,0) = (0,0,0,0),$$
$$(g \circ f)(v_4) = (0,0,0,0) \Rightarrow g(f(v_4)) = g(-1,-1,1,1) = (0,0,0,0).$$

Quindi, sappiamo che:

$$\begin{aligned} g(-h,0,1,0) &= (0,0,0,0) \\ g(0,1,0,0) &= (0,0,0,0) \\ g(-1,-1,1,1) &= (0,0,0,0). \end{aligned}$$

Da:

$$\begin{vmatrix} -h & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ x & y & z & t \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow x + hz + (1-h)t = 0$$

vediamo che:

$$\operatorname{Im} f = \mathcal{L}((-h,0,1,0),(0,1,0,0),(-1,-1,1,1)) = \left\{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + hz + (1-h)t = 0\right\}.$$

Prendiamo $e_1 \notin \operatorname{Im} f$, per cui possiamo dire che $[(-h,0,1,0),(0,1,0,0),(-1,-1,1,1),(1,0,0,0)]$ è una base di $\mathbb{R}^4$. Un'applicazione $g \colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ tale che $g \circ f$ è l'applicazione nulla è tale che necessariamente:

$$\begin{aligned} g(-h,0,1,0) &= (0,0,0,0) \\ g(0,1,0,0) &= (0,0,0,0) \\ g(-1,-1,1,1) &= (0,0,0,0), \end{aligned}$$

mentre $g(e_1)$ può essere un qualsiasi vettore di $\mathbb{R}^4$. Se poniamo, ad esempio, $g(e_1) = e_1$, abbiamo trovato un'applicazione lineare g non nulla tale che $g \circ f$ è l'applicazione identicamente nulla.

II

È assegnato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}, u$.

1. Dati i punti $A = (1, 1, 0)$ e $B = (0, 0, 1)$ determinare le equazioni delle rette incidenti la retta AB, parallele all'asse y e tangenti alla sfera di equazione di $x^2 + y^2 + z^2 = 2$.

2. Determinare e studiare in modo sintetico le quadriche contenenti le coniche

$$\Gamma_1\colon \begin{cases} y = x \\ 2x^2 + z^2 + 2x = 0 \end{cases} \quad \text{e} \quad \Gamma_2\colon \begin{cases} z = 0 \\ x^2 + y^2 + x + y = 0 \end{cases}$$

.

(Facoltativo) Dati i due piani paralleli $ax + by + cz + d = 0$ e $ax + by + cz + d' = 0$ trovare e dimostrare una formula della distanza tra i due piani in termini di a, b, c, d, d'.

Soluzione

1. La retta AB ha equazioni:

$$AB\colon \begin{cases} x = y \\ x + z - 1 = 0, \end{cases}$$

per cui il generico punto della retta AB è $P = (a, a, 1 - a)$. Dato che $\vec{y}\colon x = z = 0$, la retta parallela all'asse $\vec{y}$ e passante per P ha equazioni:

$$\begin{cases} x = a \\ z = 1 - a. \end{cases}$$

Determiniamo sotto quali condizioni la retta è tangente alla sfera data:

$$\begin{cases} x = a \\ z = 1 - a \\ x^2 + y^2 + z^2 = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = a \\ z = 1 - a \\ y^2 = 2 - a^2 - (1 - a)^2. \end{cases}$$

La retta è tangente alla sfera data se l'intersezione è data da due punti reali e coincidenti. Dal sistema precedente ciò avviene se:

$$2 - a^2 - (1 - a)^2 = 0 \Rightarrow 2a^2 - 2a - 1 = 0 \Rightarrow a = \frac{1 \pm \sqrt{3}}{2}.$$

Quindi, le rette cercata hanno equazioni:

$$\begin{cases} x = \dfrac{1 - \sqrt{3}}{2} \\ z = 1 - \dfrac{1 - \sqrt{3}}{2} = \dfrac{1 + \sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

e

$$\begin{cases} x = \dfrac{1 + \sqrt{3}}{2} \\ z = 1 - \dfrac{1 + \sqrt{3}}{2} = \dfrac{1 - \sqrt{3}}{2}. \end{cases}$$

2. Le quadriche contenenti la conica Γ_2 hanno equazione:

$$x^2 + y^2 + x + y + z(ax + by + cz + d) = 0.$$

Intersechiamo questa quadrica con il piano contenente la conica Γ_1:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + x + y + z(ax + by + cz + d) = 0 \\ y = x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x^2 + (a + b)xz + cz^2 + 2x + dz = 0 \\ y = x. \end{cases}$$

Questa conica coincide con Γ_2 se esiste $k \in \mathbb{R}$, $k \neq 0$, tale che si abbia:

$$2x^2 + (a+b)xz + cz^2 + 2x + dz = k(2x^2 + z^2 + 2x),$$

per cui:

$$\begin{cases} 2 = 2k \\ a + b = 0 \\ c = k \\ 2 = 2k \\ d = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k = 1 \\ b = -a \\ c = 1 \\ d = 0. \end{cases}$$

Quindi, le quadriche cercate hanno equazione:

$$x^2 + y^2 + axz - ayz + z^2 + x + y = 0.$$

Le matrici associate sono:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{a}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{a}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{a}{2} & -\frac{a}{2} & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{a}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{a}{2} \\ \frac{a}{2} & -\frac{a}{2} & 1 \end{pmatrix}.$$

Si ha che $|B| = \dfrac{a^2-2}{4}$ e $|A| = \dfrac{2-a^2}{2}$. Per $a = \pm\sqrt{2}$ si ha che $|B| = |A| = 0$ e anche che $\rho(B) = 3$, per cui per tali valori abbiamo due cilindri.

Per $a \neq \pm\sqrt{2}$ abbiamo ellissoidi o iperboloidi. Dal momento che:

$$P_A(T) = (1-T)\left[T^2 - 2T + \frac{2-a^2}{2}\right],$$

vediamo che gli autovalori di A sono concordi, per la regola dei segni di Cartesio, se $2 - a^2 > 0$. Quindi, per $2 - a^2 > 0$ abbiamo degli ellissoidi. Dunque, possiamo dire che per $a < -\sqrt{2}$ e $a > \sqrt{2}$ abbiamo degli iperboloidi iperbolici, in quanto $|B| > 0$, mentre per $-\sqrt{2} < a < \sqrt{2}$ abbiamo degli ellissoidi reali.