Corso di Laurea in
Ingegneria Informatica e Ingegneria Elettronica

Prova di **Algebra lineare e Geometria**- Appello 28 Ottobre 2022

Durata della prova: 90 minuti.
È vietato uscire dall'aula prima di aver consegnato definitivamente il compito.
È vietato consultare libri o appunti.

I

1. Sia $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'endomorfismo definito dall'assegnazione:
$$f(x,y,z) = (x+y+z, x+y+z, -x+hy+hz),$$
al variare di $h \in \mathbb{R}$. Studiare la semplicità di f al variare di $h \in \mathbb{R}$, determinando, nei casi in cui f ammette un autospazio di dimensione maggiore o uguale a 2, ove possibile, una base di autovettori per f.

2. È dato il sottospazio $V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid y - z = 0\}$. Calcolare $f(V)$ al variare di $h \in \mathbb{R}$, specificandone la dimensione, e calcolare $f(V) + V$ al variare di $h \in \mathbb{R}$, specificando se la somma è diretta o meno.

Soluzione

1. È facile vedere che:
$$P(T) = \begin{vmatrix} 1-T & 1 & 1 \\ 1 & 1-T & 1 \\ -1 & h & h-T \end{vmatrix} = (1-T)^2(h-T) - h(1-T) = (1-T)T(T-h-1).$$
Quindi, gli autovalori sono $0, 1, h+1$, tutti distinti a due a due distinti di molteplicità algebrica pari ad 1 per $h \neq 0, -1$. In tal caso, f è semplice.

Sia $h = 0$. In questo caso, sappiamo che gli autovalori sono 0, con $m_0 = 1$, e 1, con $m_1 = 2$. Necessariamente, si ha che $\dim V_0 = m_0 = 1$, mentre $1 \leq \dim V_1 \leq 2 = m_1$, per cui possiamo dire che f è semplice se $\dim V_1 = m_1 = 2$. Sappiamo che $V_1 = \operatorname{Ker} f_1$, dove $f_1 = f - i$ e:
$$M(f_1) = M(f) - I = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{riducendo}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$
Questo vuol dire che $\rho(M(f_1)) = 2$ e che $\dim V_1 = 3 - 2 = 1 < 2 = m_1$. Quindi, f non è semplice per $h = 0$ e non è possibile, dunque, determinare una base di autovettori.

Sia $h = -1$. In questo caso, sappiamo che gli autovalori sono 0, con $m_0 = 2$, e 1, con $m_1 = 1$. Necessariamente, si ha che $\dim V_1 = m_1 = 1$, mentre $1 \leq \dim V_0 \leq 2 = m_0$, per cui possiamo dire che f è semplice se $\dim V_0 = m_0 = 2$. Sappiamo che $V_0 = \operatorname{Ker} f$ e:
$$M(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{riducendo}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$
Questo vuol dire che $\rho(M(f)) = 1$ e che $\dim V_0 = 3 - 1 = 2 = m_0$. Quindi, f è semplice per $h = -1$ ed è possibile, dunque, determinare una base di autovettori. Dalla matrice precedente otteniamo:
$$V_0 = \operatorname{Ker} f = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x+y+z = 0\} = \mathcal{L}((1,0,-1),(0,1,-1)).$$

Sia $T=1$. In tal caso, $V_1 = \operatorname{Ker} f_1$, dove $f_1 = f - i$ e:

$$M(f_1) = M(f) - I = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{riducendo}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dunque:

$$V_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid y+z=0,\ x+z=0\} = \mathcal{L}((-1,-1,1)).$$

Possiamo, perciò, concludere che per $h=-1$ una base di autovettori è $[(1,0,-1),(0,1,-1),(-1,-1,1)]$.

2. È immediato vedere che $V = \mathcal{L}((1,0,0),(0,1,1))$, per cui:

$$f(V) = \mathcal{L}((f(1,0,0), f(0,1,1)) = \mathcal{L}\left((1,1,-1),(2,2,2h)\right).$$

Da:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 2h \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{riducendo}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2h+2 \end{pmatrix}$$

segue che per $h \neq -1$ si ha che $\dim f(V) = 2$, mentre per $h=-1$ si ha che $\dim f(V) = 1$.

Sia $h \neq -1$. Sappiamo che:

$$f(V) + V = \mathcal{L}((1,0,0),(0,1,1),(1,1,-1),(2,2,2h+2)).$$

Dal momento che:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0,$$

segue che $\dim(f(V)+V)) = 3$ e, essendo $f(V)+V \subseteq \mathbb{R}^3$, vediamo che $f(V)+V = \mathbb{R}^3$ per $h \neq -1$. Tuttavia, dalla formula di Grassmann vediamo che:

$$3 = \dim(f(V)+V) = \dim f(V) + \dim V - \dim(f(V)\cap V) = 2+2-\dim(f(V)\cap V),$$

per cui $\dim(f(V)\cap V) = 1$ per $h \neq -1$. Questo implica che per $h \neq -1$ la somma non è diretta.

Per $h=-1$, invece sappiamo che:

$$f(V) + V = \mathcal{L}((1,0,0),(0,1,1),(1,1,-1))$$

e il determinante precedente ci dice che anche in questo caso $f(V)+V = \mathbb{R}^3$. Tuttavia, in questo caso abbiamo $\dim f(V) = 1$ e, dunque, dalla formula di Grassmann si ottiene facilmente che $\dim(f(V)\cap V)) = 0$, cioè $f(V)\cap V = \{(0,0,0)\}$. Ciò comporta che la somma è diretta ed è possibile, perciò, concludere che per $h=-1$ abbiamo $f(V)\oplus V = \mathbb{R}^3$.

II

1. È assegnato nel piano un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $O, \vec{x}, \vec{y}, u$. Studiare il fascio di coniche di equazione:

$$2x^2 + 2xy + hy^2 - 2y - 2 = 0,$$

determinando, in particolare, punti base e coniche spezzate.

2. È assegnato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}, u$. Data la conica:

$$\Gamma\colon \begin{cases} x^2 - y^2 - 1 = 0 \\ z = 0, \end{cases}$$

determimare l'equazione del cilindro e del cono contenenti Γ e aventi vertice, rispettivamente, $V = (0,1,1,0)$ e $V' = (0,1,1)$.

Soluzione

1. La conica nascosta ha equazione $y^2 = 0$, per cui è una prima conica spezzata. Da:

$$B = \det \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & h & -1 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} = -4h$$

vediamo che l'altra conica spezzata del fascio si ottiene per $h = 0$. Per tale valore di h la conica ha equazione:

$$2x^2 + 2xy - 2y - 2 = 0 \Rightarrow (x-1)(x+y+1) = 0.$$

I punti base del fascio sono dati da:

$$\begin{cases} (x-y)(x+y+1) = 0 \\ y^2 = 0, \end{cases}$$

per cui sono i punti di coordinate $(1,0)$ e $(-1,0)$, entrambi contati due volte. Infine, per $h \neq 0$ abbiamo coniche irriducibili e, essendo:

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & h \end{vmatrix} = 2h - 1,$$

possiamo dire che per $h > \frac{1}{2}$ abbiamo delle ellissi, nessuna delle quali è una circonferenza; per $h = \frac{1}{2}$ abbiamo una parabola; per $h < \frac{1}{2}$, $h \neq 0$, abbiamo delle iperboli, tra le quali figura una equilatera per $h = -2$.

2. Ricordiamo che la generica quadrica contenente Γ ha equazione:

$$x^2 - y^2 - 1 + z(ax + by + cz + d) = 0 \Rightarrow x^2 - y^2 + axz + byz + cz^2 + dz - 1 = 0.$$

La matrice associata è:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{a}{2} & 0 \\ 0 & -1 & \frac{b}{2} & 0 \\ \frac{a}{2} & \frac{b}{2} & c & \frac{d}{2} \\ 0 & 0 & \frac{d}{2} & -1 \end{pmatrix}.$$

Il cilindro contenente contenente Γ e avente vertice V è tale che:

$$B \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

per cui:

$$\begin{cases} \frac{a}{2} = 0 \\ -1 + \frac{b}{2} = 0 \\ \frac{b}{2} + c = 0 \\ \frac{d}{2} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 2 \\ c = -1 \\ d = 0. \end{cases}$$

Quindi, il cilindro cercato ha equazione:

$$x^2 - y^2 + 2yz - z^2 - 1 = 0.$$

Per quanto riguarda il cono si ha:

$$B \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

per cui:

$$\begin{cases} \dfrac{a}{2} = 0 \\ -1 + \dfrac{b}{2} = 0 \\ \dfrac{b}{2} + c + \dfrac{d}{2} = 0 \\ \dfrac{d}{2} - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 2 \\ c = -2 \\ d = 2. \end{cases}$$

Quindi, il cono ha equazione:

$$x^2 - y^2 + 2yz - 2z^2 + 2z - 1 = 0.$$