Corso di Laurea in
Ingegneria Informatica (A-Co, Cp-I e J-Pr) e Ingegneria Elettronica (A-Co, Cp-I e J-Pr)

Prova di **Algebra lineare e Geometria**- Appello 27 Giugno 2022

Durata della prova: 90 minuti.
È vietato uscire dall'aula prima di aver consegnato definitivamente il compito.
È vietato consultare libri o appunti.

I

1. Sia:
$$M = \begin{pmatrix} 1 & h & 1 & -1 \\ 2 & -1 & h & 3 \\ 1 & -3 & 1 & h+2 \end{pmatrix}$$
e sia $f\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare associata a M rispetto alla base canonica. Determinare $\operatorname{Ker} f$ e $\operatorname{Im} f$ al variare di $h \in \mathbb{R}$.

2. Sia $g\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ l'applicazione definita dalla legge
$$g(x, y, z) = (x, y, z, 0).$$
Nel caso $h = 2$ studiare la semplicità dell'endomorfismo $g \circ f$ e calcolare gli autospazi.

Soluzione

1. Da:
$$M(f) = \begin{pmatrix} 1 & h & 1 & -1 \\ 2 & -1 & h & 3 \\ 1 & -3 & 1 & h+2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{riducendo, per } h\neq 2} \begin{pmatrix} 1 & h & 1 & -1 \\ 0 & -1-2h & h-2 & 5 \\ 0 & -h-3 & 0 & h+3 \end{pmatrix}.$$
Quindi, per $h \neq 2, -3$ possiamo dire che $\dim \operatorname{Im} f = \rho(M(f)) = 3$. Essendo $\operatorname{Im} f \subseteq \mathbb{R}^3$, concludiamo che per $h \neq 2, -3$ $\operatorname{Im} f = \mathbb{R}^3$, per cui f è suriettiva. Inoltre, $\dim \operatorname{Ker} f = 4 - \dim \operatorname{Im} f = 1$ e:
$$\operatorname{Ker} f = \Big\{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + hy + z - t = 0,\ (-1-2h)y + (h-2)z + 5t = 0,\ (-h-3)y + (h+3)t = 0\Big\} = \\ = \mathcal{L}((-h-1, 1, 2, 1)).$$
Sia $h = -3$. In tal caso, la riduzione precedente diventa:
$$M(f) = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & -3 & 3 \\ 1 & -3 & 1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{riducendo}} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 & -1 \\ 0 & 5 & -5 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$
In tal caso, $\dim \operatorname{Im} f = \rho(M(f)) = 2$ e una sua base è data da $[(1, 2, 1), (-3, -1, -3)]$. Inoltre, $\dim \operatorname{Ker} f = 4 - \dim \operatorname{Im} f = 2$ e si ha:
$$\operatorname{Ker} f = \Big\{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x - 3y + z - t = 0,\ 5y - 5z + 5t = 0\Big\} = \\ = \Big\{(2y, y, y+t, t) \in \mathbb{R}^4\Big\} = \mathcal{L}((2, 1, 1, 0), (0, 0, 1, 1)).$$

Sia $h = 2$. In tal caso:

$$M(f) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 2 & 3 \\ 1 & -3 & 1 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{riducendo}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & -5 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

In tal caso, $\dim \operatorname{Im} f = \rho(M(f)) = 2$ e una sua base è data da $[(1,2,1),(2,-1,-3)]$. Inoltre, $\dim \operatorname{Ker} f = 4 - \dim \operatorname{Im} f = 2$ e si ha:

$$\begin{aligned} \operatorname{Ker} f = \left\{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + 2y + z - t = 0,\ -5y + 5t = 0\right\} = \\ = \left\{(-y-z, y, z, y) \in \mathbb{R}^4\right\} = \mathcal{L}((-1,1,0,1),(-1,0,1,0)). \end{aligned}$$

2. Osserviamo che:

$$M(g \circ f) = M(g)M(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 2 & 3 \\ 1 & -3 & 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 2 & 3 \\ 1 & -3 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Quindi:

$$P(T) = \begin{vmatrix} 1-T & 2 & 1 & -1 \\ 2 & -1-T & 2 & 3 \\ 1 & -3 & 1-T & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -T \end{vmatrix} = -T^3(1-T).$$

Quindi, gli autovalori sono 0 e 1, con $m_0 = 3$ e $m_1 = 1$. Essendo necessariamente $\dim V_1 = m_1 = 1$, $g \circ f$ è semplice se $\dim V_0 = m_0 = 3$.

Sia, dunque, $T = 0$. Ricordando che $V_0 = \operatorname{Ker}(g \circ f)$, abbiamo:

$$M(g \circ f) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 2 & 3 \\ 1 & -3 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{riducendo}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & -5 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dunque, $\dim V_0 = 4 - 2 = 2 < 3 = m_0$. Ciò significa che $g \circ f$ non è semplice per $h = 2$. Inoltre, è immediato vedere che:

$$V_0 = \operatorname{Ker}(g \circ f) = \operatorname{Ker} f = \mathcal{L}((-1,1,0,1),(-1,0,1,0)).$$

Sia $T = 1$. In tal caso, $V_1 = \operatorname{Ker}(g \circ f)_1$ e:

$$M(g \circ f)_1 = M(g \circ f) - I = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & -1 \\ 2 & -2 & 2 & 3 \\ 1 & -3 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{riducendo}} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & -1 \\ 2 & -6 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dunque:

$$V_1 = \left\{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid 2y + z + t = 0,\ 2x - 6y + 5t = 0,\ t = 0\right\} = \mathcal{L}((3,1,-2,0)).$$

II

1. È assegnato nel piano un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $O, \vec{x}, \vec{y}, u$. Sono dati i punti $A = (1,-1)$, $B = (0,1)$ e $C = (2,-1)$ e la retta $r\colon x + y = 0$. Determinare e studiare il fascio di coniche tangenti in A alla retta r e passanti per B e C. Determinare gli asintoti dell'iperbole equilatera del fascio.

2. È assegnato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}, u$. Studiare, al variare di $h \in \mathbb{R}$, le quadriche di equazione:

$$x^2 + y^2 + 2hyz + z^2 - 2y - 1 = 0.$$

Soluzione

1. Le coniche spezzate del fascio sono $r \cup BC$: $(x+y)(x+y-1) = 0$ e $AB \cup AC$: $(2x+y-1)(y+1) = 0$. Dunque, il fascio di coniche ha equazione:

$$(x+y)(x+y-1) + h(2x+y-1)(y+1) = 0 \Rightarrow x^2 + (2h+2)xy + (h+1)y^2 - x - y - h = 0.$$

Dal momento che le coniche spezzate del fascio sono unicamente le due utilizzate per scriverne l'equazione, possiamo dire subito che per $h = 0$ abbiamo una conica spezzata, mentre per $h \neq 0$ le coniche sono irriducibili. Inoltre, essendo $|A| = -h(h+1)$, vediamo che per $-1 < h < 0$ abbiamo delle ellissi, tutte reali, in quanto i punti base sono reali; non vi sono circonferenze nel fascio; per $h = -1$ abbiamo una parabola, mentre per $h = 0$ abbiamo una conica spezzata; per $h < -1$ e per $h > 0$ abbiamo delle iperboli, tra le quali figura una equilatera per $h = -2$.

Sia $h = -2$. In tal caso, l'iperbole equilatera ha equazione:

$$x^2 - 2xy - y^2 - x - y + 2 = 0.$$

Si ha:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -\frac{1}{2} \\ -1 & -1 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 2 \end{pmatrix},$$

per cui il centro di simmetria è dato da:

$$\begin{cases} x - y - \frac{1}{2} = 0 \\ -x - y - \frac{1}{2} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = -\frac{1}{2}. \end{cases}$$

Quindi, il centro di simmetria è il punto $(0, -\frac{1}{2})$. I punti impropri dell'iperbole sono dati da:

$$\begin{cases} x^2 - 2xy - y^2 - xt - yt + 2t^2 = 0 \\ t = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \left(\frac{y}{x}\right)^2 + 2\frac{y}{x} - 1 = 0 \\ t = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{y}{x} = -1 \pm \sqrt{2} \\ t = 0. \end{cases}$$

Quindi, i punti impropri sono $P_{1,\infty} = (1, -1+\sqrt{2}, 0)$ e $P_{2,\infty} = (-1-\sqrt{2}, 0)$. Gli asintoti sono le rette che passano per il centro di simmetria e per questi due punti, per cui hanno equazioni:

$$y + \frac{1}{2} = (-1+\sqrt{2})x \quad \text{e} \quad y + \frac{1}{2} = (-1-\sqrt{2})x.$$

2. Le matrici associate alle quadriche sono:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & h & -1 \\ 0 & h & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & h \\ 0 & h & 1 \end{pmatrix}.$$

Essendo $|B| = h^2 - 2$ e $|A| = 1 - h^2$, vediamo che per $h = \pm\sqrt{2}$ abbiamo due coni, mentre per $h = \pm 1$ abbiamo due paraboloidi ellittici. Per $h \neq \pm 1, \pm\sqrt{2}$ abbiamo iperboloidi o ellissoidi. Per stabilirlo calcoliamo:

$$P_A(T) = \begin{vmatrix} 1-T & 0 & 0 \\ 0 & 1-T & h \\ 0 & h & 1-T \end{vmatrix} = (1-T)(1+h-T)(1-h-T).$$

Quindi, gli autovalori di A sono 1, $1+h$ e $1-h$ ed essi sono concordi per $-1 < h < 1$, per cui in tal caso avremo un ellissoide. Di conseguenza, vediamo che per $h < -\sqrt{2}$ e $h > \sqrt{2}$ abbiamo degli iperboloidi iperbolici, per $-\sqrt{2} < h < -1$ e $1 < h < \sqrt{2}$ abbiamo degli iperboloidi ellittici, mentre per $-1 < h < 1$ abbiamo degli ellissoidi reali.