Corso di Laurea in
Ingegneria Informatica (J-Pr) e Ingegneria Elettronica (J-Pr)

Prova di **Algebra lineare e Geometria**- Appello 26 Gennaio 2022

Durata della prova: 2 ore.
È vietato uscire dall'aula prima di aver consegnato definitivamente il compito.
È vietato consultare libri o appunti.

I

Sono assegnati i vettori $v_1 = (1,0,0,1)$, $v_2 = (0,1,0,0)$, $v_3 = (0,0,1,0)$, $w_1 = (1,1,0,0)$, $w_2 = (0,0,1,0)$, $w_3 = (0,0,0,1) \in \mathbb{R}^4$ e gli spazi vettoriali $V, W \subset \mathbb{R}^4$ aventi come basi, rispettivamente, $\mathcal{A} = [v_1, v_2, v_3]$ e $\mathcal{B} = [w_1, w_2, w_3]$. È assegnata, inoltre, l'applicazione lineare $f \colon V \to W$ definita dall'assegnazione:

$$M^{\mathcal{A},\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ h & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix},$$

con $h \in \mathbb{R}$.

1. Studiare f, al variare di $h \in \mathbb{R}$, determinando, in ciascun caso $\operatorname{Im} f$ e $\operatorname{Ker} f$. Mostrare che la somma $\operatorname{Im} f + \operatorname{Ker} f$ è diretta per ogni $h \in \mathbb{R}$.
2. Diagonalizzare la matrice $M^{\mathcal{A},\mathcal{B}}(f)$, se possibile, nei casi $h = 0$ e $h = 4$.

Soluzione

1. Dal momento che $|M^{\mathcal{A},\mathcal{B}}(f)| = 8 - 2h$, concludiamo facilmente che per $h \neq 4$ l'applicazione lineare è un isomorfismo. In particolare, questo vuol dire che f è iniettiva e suriettiva, per cui $\operatorname{Ker} f = \{(0,0,0,0)\}$ e $\operatorname{Im} f = W$.

   Sia $h = 4$. In tal caso:

   $$M^{\mathcal{A},\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{riducendo}} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

   per cui $\dim \operatorname{Im} f = \rho(M^{\mathcal{A},\mathcal{B}}(f)) = 2$ e possiamo dire che una sua base è determinata dalle prime due colonne della matrice, cioè da:

   $$[2w_1 + 4w_2, w_1 + w_2 + 2w_3] = [(2,2,4,0),(1,1,1,2)].$$

   Naturalmente, possiamo anche dire che una sua base è data da:

   $$[(1,1,2,0),(1,1,1,2)].$$

   Inoltre, $\dim \operatorname{Ker} f = \dim V - \dim \operatorname{Im} f = 1$ e:

   $$\operatorname{Ker} f = \{v \in V \mid [v]_{\mathcal{A}} = (a,b,c),\ 2a + b = 0,\ -b - c = 0\} = \\ = \mathcal{L}(-v_1 + 2v_2 - 2v_3) = \mathcal{L}((-1,2,-2,-1)).$$

   Per quanto riguarda la somma $\operatorname{Ker} f + \operatorname{Im} f$, osserviamo che per $h \neq 4$, essendo $\operatorname{Ker} f = \{(0,0,0,0)\}$, è scontato che essa sia diretta, in quanto ovviamente si ha $\operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Im} f = \{(0,0,0,0)\}$.

Sia $h = 4$. In tal caso, sappiamo che:

$$\operatorname{Ker} f + \operatorname{Im} f = \mathcal{L}((1,1,2,0),(1,1,1,2),(-1,2,-2,-1)).$$

Proviamo a determinarne la dimensione mettendo i suoi generatori in matrice:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & -2 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{riducendo}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Dunque, abbiamo che:

$$\dim(\operatorname{Ker} f + \dim \operatorname{Im} f) = 3 = 1 + 2 = \dim \operatorname{Ker} f + \dim \operatorname{Im} f.$$

Dalla formula di Grassmann segue che deve essere $\dim(\operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Im} f) = 0$, cioè $\operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Im} f = \{(0,0,0,0)\}$, il che vuol dire che anche nel caso $h = 4$ la somma è diretta.

2. Poniamo $M = M^{\mathcal{A},\mathcal{B}}(f)$. Nel caso $h = 0$, si vede facilmente che:

$$P_M(T) = |M - TI| = (2-T)(T^2 - 3T + 4),$$

per cui in questo caso l'unico autovalore è 2 ed ha molteplicità 1. Ciò significa che per $h = 0$ la matrice non è diagonalizzabile.

Sia $h = 4$. in tal caso:

$$P_M(T) = |M - TI| = \begin{vmatrix} 2-T & 1 & 0 \\ 4 & 1-T & -1 \\ 0 & 2 & 2-T \end{vmatrix} = (2-T)(T^2 - 3T).$$

In tal caso, gli autovalori sono 0, 2 e 3, tutti con molteplicità algebrica 1, per cui la matrice è diagonalizzabile. Essendo facile vedere che gli autospazi sono $V_0 = \mathcal{L}((-1,2,-2))$, $V_2 = \mathcal{L}((1,0,4))$ e $V_3 = \mathcal{L}((1,1,2))$, vediamo che si ha $P^-1MP = D$, dove:

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad P = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ -2 & 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

II

1. È assegnato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}, u$. Dati la retta:

$$r\colon \begin{cases} 2x - y + z = 1 \\ x - y - z = 2, \end{cases}$$

il piano $\pi\colon y + 2 = 0$ e il punto $P = (1,-1,1)$, determinare la retta s incidente r, parallela a π e passante per P.

2. È assegnato nel piano un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $O, \vec{x}, \vec{y}, u$. Determinare e studiare il fascio di coniche passanti per i punti $A = (1,-1)$, $B = (1,1)$, $C = (0,2)$ e $D = (0,-2)$. Determinare la natura della conica passante per i punti A, B, C, D e $P_\infty = (1,2,0)$.

Soluzione

1. La retta cercata è intersezione del piano α contenente r e passante per P e del piano β parallelo a π e passante per P. I piani contenenti r hanno equazione:

$$\lambda(2x - y + z - 1) + \mu(x - y - z - 2) = 0.$$

Imponendo il passaggio per P otteniamo:

$$3\lambda - \mu = 0 \Rightarrow \mu = 3\lambda.$$

Prendendo $\lambda = 1$ e $\mu = 3$ otteniamo $\alpha\colon 5x - 4y - 2z - 7 = 0$. È, poi, facile vedere che $\beta\colon y + 1 = 0$, per cui la retta cercata ha equazioni:

$$\alpha \cap \beta\colon \begin{cases} 5x - 4y - 2z - 7 = 0 \\ y + 1 = 0. \end{cases}$$

2. Le coniche spezzate del fascio hanno equazioni:

$$AB \cup CD\colon\; x(x-1) = 0,$$

$$AC \cup BD\colon\; (3x+y-2)(3x-y-2) = 0,$$
$$AD \cup BC\colon\; (x-y-2)(x+y-2) = 0.$$

Quindi, il fascio di coniche ha equazione:

$$hx(x-1) + (x-y-2)(x+y-2) = 0 \Rightarrow (h+1)x^2 - y^2 - (h+4)x + 4 = 0.$$

Le matrici associate sono:

$$B = \begin{pmatrix} h+1 & 0 & -\dfrac{h+4}{2} \\ 0 & -1 & 0 \\ -\dfrac{h+4}{2} & 0 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad A = \begin{pmatrix} h+1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Abbiamo che $|B| = \frac{h^2-8h}{4}$ e $|A| = -h-1$. Quindi, per $h = 0$ e $h = 8$ abbiamo due coniche spezzate, $AD \cup BC$ e $AC \cup BD$, rispettivamente. Inoltre, per $h < -1$ abbiamo delle ellissi, tutte reali, tra le quali figura una circonferenza per $h = -2$; per $h = -1$ abbiamo una parabola; per $h > -1$, $h \neq 0, 8$, abbiamo delle iperboli, delle quali nessuna è equilatera, in quanto $\mathrm{Tr}(A) = h$.

Per quanto riguarda la conica che passa per i cinque punti dati, essa è la conica del fascio passante per P_∞. Scrivendo l'equazione del fascio in coordinate omogenee:

$$(h+1)x^2 - y^2 - (h+4)xt + 4t^2 = 0$$

e imponendo il passaggio per P_∞ otteniamo:

$$h + 1 - 4 = 0 \Rightarrow h = 3.$$

La classificazione precedente ci dice che la conica cercata è un'iperbole.