Corso di Laurea in Ingegneria Industriale

Prova di **Algebra lineare e Geometria**- Appello 25 Gennaio 2022

Durata della prova: 90 minuti.
È vietato uscire dalla riunione prima di aver consegnato definitivamente il compito.
È vietato consultare libri o appunti.

I

Sono assegnati i vettori $v_1 = (1,0,1,0)$, $v_2 = (0,1,0,0)$, $v_3 = (0,0,1,0), v_4 = (0,0,1,1) \in \mathbb{R}^4$ e la base $\mathcal{A} = [v_1, v_2, v_3, v_4]$ di $\mathbb{R}^4$. È assegnata, inoltre, l'applicazione lineare $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ definita dall'assegnazione:

$$M^{\mathcal{E},\mathcal{A}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & h \\ 2 & 3 & h \\ h & 1 & -2 \end{pmatrix},$$

al variare di $h \in \mathbb{R}$, essendo $\mathcal{E}$ la base canonica di $\mathbb{R}^3$.

1. Studiare f, al variare di $h \in \mathbb{R}$, determinando, in ciascun caso, $\operatorname{Ker} f$ e $\operatorname{Im} f$. Determinare il valore di $h \in \mathbb{R}$ per il quale $(0,0,0,1) \in \operatorname{Im} f$.
2. Data la matrice:
$$A = \begin{pmatrix} 0 & h & -h \\ 1 & 0 & h \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$
con $h \in \mathbb{R}$, determinare i valori di h per i quali 0 è autovalore per A e, in tali casi, se possibile, diagonalizzare la matrice A..

Soluzione

1. Dal minore:
$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & h \\ 2 & 3 & h \end{vmatrix} = 2h+2$$
vediamo che per $h \neq -1$ si ha $\dim \operatorname{Im} f = \rho(M^{\mathcal{E},\mathcal{A}}(f)) = 3$, per cui una sua base è:

$[v_1 + 2v_3 + hv_4, 2v_1 + v_2 + 3v_3 + v_4, -v_1 + hv_2 + hv_3 - 2v_4] = [(1,0,h+3,h),(2,1,6,1),(-1,h,h-3,-2)]$.

In tal caso, inoltre, abbiamo $\dim \mathit{Ker} f = 3-3 = 0$, per cui si ha $\operatorname{Ker} f = \{(0,0,0)\}$.

Sia $h = -1$. In questo caso abbiamo:
$$M^{\mathcal{E},\mathcal{A}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & -1 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{riducendo}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$
per cui si ha $\dim \operatorname{Im} f = 2$ e una sua base è data da:
$$[v_1 + 2v_3 - v_4, 2v_2 + v_2 + 3v_3 + v_4] = [(1,0,2,-1),(2,1,6,1)].$$
Inoltre, in questo caso abbiamo anche $\dim \operatorname{Ker} f = 1$ e:
$$\operatorname{Ker} f = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + 2y - z = 0,\ y - z = 0\} = \mathcal{L}((-1,1,1)).$$

Dal momento che per ogni valore di $h \in \mathbb{R}$ si ha:

$$\operatorname{Im} f = \mathcal{L}((1,0,h+3,h),(2,1,6,1),(-1,h,h-3,-2)),$$

per sapere se $(0,0,0,1) \in \operatorname{Im} f$ dobbiamo considerare la matrice:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & h+3 & h \\ 2 & 1 & 6 & 1 \\ -1 & h & h-3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{riducendo}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & h+3 & h \\ 0 & 1 & -2h & 1-2h \\ 0 & 0 & 2h^2+2h & 2h^2-2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Se $2h^2+2h \neq 0$, allora è evidente che $(0,0,0,1) \notin \operatorname{Im} f$. Se $h=0$, allora è semplice vedere che, completando la riduzione precedente, l'ultima riga si annulla, il che significa che per $h=0$ si ha $(0,0,0,1) \in \operatorname{Im} f$. Invece, per $h=-1$, l'ultima riga non si annulla nella riduzione e, quindi, nemmeno per $h=-1$ abbiamo $(0,0,0,1) \in \operatorname{Im} f$.

2. Dal momento che $|A| = h^2 - h$, possiamo dire che 0 è autovalore se $h=0$ o $h=1$.

   Sia $h=0$. In tal caso, è immediato vedere che $P_A(T) = -T^3$, per cui 0 è autovalore con molteplicità algebrica 3, ma:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

   Ciò vuol dire che $\dim V_0 = 3 - \rho(A) = 1 < 3 = m_0$, per cui per $h=0$ la matrice A non è diagonalizzabile.

   Sia $h=1$. In tal caso, si vede facilmente che $P_A(T) = -T^3 + T = -T(T^2-1)$, per cui gli autovalori, tutti distinti di molteplicità algebrica 1, sono 0, 1 e -1. Quindi, in tal caso A è diagonalizzabile.

   Sia $T=0$. Da:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{riducendo}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

   vediamo che:

$$V_0 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid y - z = 0,\ x + z = 0\} = \mathcal{L}((-1,1,1)).$$

   Sia $T=1$. Da:

$$A - I = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{riducendo}} \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

   vediamo che:

$$V_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid -x + y - z = 0,\ 2y - 2z = 0\} = \mathcal{L}((0,1,1)).$$

   Sia $T=-1$. Da:

$$A + I = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{riducendo}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

   vediamo che:

$$V_{-1} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y - z = 0,\ 2x + 2y = 0\} = \mathcal{L}((1,-1,0)).$$

   Quindi, una base di autovettori è $[(-1,1,1),(0,1,1),(1,-1,0)]$ e possiamo dire che $P^{-1}AP = D$, dove:

$$P = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

II

1. È assegnato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}, u$. Data la retta:

$$r\colon \begin{cases} x - 1 = 0 \\ z - 1 = 0, \end{cases}$$

determinare la retta ortogonale e incidente r e l'asse $\vec{z}$. Determinare la distanza $d(r, \vec{z})$.

2. È assegnato nel piano un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $O, \vec{x}, \vec{y}, u$. Studiare, al variare di $h \in \mathbb{R}$, le quadriche di equazione:

$$x^2 - 2xy + 2xz + hz^2 + 2x + h - 1 = 0.$$

Soluzione

1. Il generico punto dell'asse $\vec{z}$ è $A = (0, 0, a)$, mentre il generico punto della retta r è $B = (1, b, 1)$. Quindi, la retta AB ha parametri direttori $(1, b, 1 - a)$ e, tenuto conto del fatto che l'asse $\vec{z}$ e la retta r hanno parametri direttori, rispettivamente, $(0, 0, 1)$ e $(0, 1, 0)$, possiamo dire che la retta AB è ad entrambe ortogonale se si ha:

$$\begin{cases} 1 - a = 0 \\ b = 0. \end{cases}$$

Quindi, i punti A e B in cui la retta cercata incontra le rette date sono $A = (0, 0, 1)$ e $B = (1, 0, 1)$. Ciò vuol dire che:

$$AB : \begin{cases} y = 0 \\ z = 1 \end{cases}$$

e $d(\vec{z}, \vec{r}) = \overline{AB} = 1$.

2. Le matrici associate sono:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & h & 0 \\ 1 & 0 & 0 & h-1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & h \end{pmatrix}.$$

Quindi, $|B| = -h(h-1)$ e $|A| = -h$. Ciò vuol dire che per $h = 1$ abbiamo un cono e per $h = 0$, verificando facilmente che $\rho(B) = 3$, abbiamo un cilindro.

Sia $h \neq 0, 1$. Dato che:

$$P_A(T) = -T^3 + (h+1)T^2 + (2-h)T - h,$$

abbiamo un ellissoide se è verificato uno dei sistemi:

$$\begin{cases} h + 1 > 0 \\ 2 - h < 0 \\ -h > 0 \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} h + 1 < 0 \\ 2 - h < 0 \\ -h < 0. \end{cases}$$

Essendo entrambi impossibili, concludiamo subito che le quadriche sono tutte iperboloidi e, dal segno di $|B|$, possiamo dire che per $0 < h < 1$ sono iperboloidi iperbolici, mentre per $h < 0$ e $h > 1$ sono iperboloidi ellittici.