Corso di Laurea in
Ingegneria Informatica e Ingegneria Elettronica

Prova di **Algebra lineare e Geometria**- Appello 20 Settembre 2022

Durata della prova: 90 minuti.
È vietato uscire dall'aula prima di aver consegnato definitivamente il compito.
È vietato consultare libri o appunti.

I

1. Sia $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ definita dalle assegnazioni:

$$f(1,1,0) = (2, h, h+1, -1)$$
$$f(0,1,1) = (0, 2h, 0, h+1)$$
$$f(0,-1,0) = (-1, -h, -1, 0).$$

Studiare l'applicazione lineare f al variare di $h \in \mathbb{R}$, determinando in ciascun caso $\operatorname{Im} f$ e $\operatorname{Ker} f$. Determinare i valori di $h \in \mathbb{R}$ per i quali $\operatorname{Im} f \oplus \mathcal{L}((0,0,0,1)) = \mathbb{R}^4$.

2. Sia $g\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'endomorfismo definito da:

$$g(x,y,z) = (y+z, x+hz, -hx+hy),$$

al variare di $h \in \mathbb{R}$. Studiare la semplicità di g al variare di $h \in \mathbb{R}$.

Soluzione

1. È immediato vedere che:

$$M(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & h & h \\ h & 1 & -1 \\ -1 & 0 & h+1 \end{pmatrix}.$$

Dato che:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & h & h \\ h & 1 & -1 \end{vmatrix} = 2h^2 - 2h$$

e che $2h^2 - 2h = 0$ per $h = 0, 1$, concludiamo che per $h \neq 0, 1$ si ha $\dim \operatorname{Im} f = \rho(M(f)) = 3$, per cui una base di $\operatorname{Im} f$ è $[(1,0,h,-1), (1,h,1,0), (-1,h,-1,h+1)]$. Inoltre, $\dim \operatorname{Ker} f = \dim \mathbb{R}^3 - \dim \operatorname{Im} f = 0$, il che vuol dire che $\operatorname{Ker} f = \{(0,0,0)\}$ e che f è iniettiva.

Sia $h = 0$. In tal caso:

$$M(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{riducendo}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Questo vuol dire che $\dim \operatorname{Im} f = \rho(M(f)) = 3$ e una sua base è $[(1,0,0,-1), (1,0,1,0), (-1,0,-1,1)]$. Inoltre, come in precedenza, si osserva che $\operatorname{Ker} f = \{(0,0,0)\}$ e che f è iniettiva.

Sia $h = 1$. In tal caso:

$$M(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{riducendo}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

In questo caso, dunque, $\dim \operatorname{Im} f = \rho(M(f)) = 2$ e una sua base è data da $[(1,0,1,-1),(1,1,1,0)]$. Inoltre, si ha che $\dim \operatorname{Ker} f = \dim \mathbb{R}^3 - \dim \operatorname{Im} f = 1$ e:

$$\operatorname{Ker} f = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x+y-z=0,\ y+z=0\} = \mathcal{L}((-2,1,-1)).$$

2. Dato che:

$$M(g) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & h \\ -h & h & 0 \end{pmatrix},$$

abbiamo:

$$P(T) = \begin{vmatrix} -T & 1 & 1 \\ 1 & -T & h \\ -h & h & -T \end{vmatrix} = -T^3 + (h^2-h+1)T - h^2 + h.$$

Si osserva facilmente che $T=1$ è radice del polinomio caratteristico, per cui è un autovalore per g, e, usando il metodo di Ruffini, vediamo che:

$$P(T) = (T-1)(-T^2-T+h^2-h) = -(T-1)(T^2+T-h^2+h).$$

Questo significa che gli autovalori per g sono 1, $-h$, $h-1$. Essi sono a due a due distinti per $h \neq -1, 2, \frac{1}{2}$ e per tali valori di h, dunque, possiamo subito concludere che g è semplice.

Sia $h=-1$. In questo caso gli autovalori sono $-2, 1$, con $m_{-2}=1$ e $m_1=2$. Dunque, certamente si ha $\dim V_{-2} = m_{-2} = 1$, mentre $1 \leq \dim V_1 \leq m_1 = 2$ e g è semplice se $\dim V_1 = m_1 = 2$. Sia, perciò, $T=1$. Sappiamo che $V_1 = \operatorname{Ker} g_1$, dove $g_1 = g - i$ e:

$$M(g_1) = M(g) - I = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

In questo caso, è evidente che $\rho(M(g_1)) = 1$, per cui $\dim V_1 = \dim \operatorname{Ker} g_1 = 3-1 = 2 = m_1$, per cui possiamo dire che per $h=-1$ l'endomorfismo g è semplice.

Sia $h=2$. In questo caso gli autovalori sono $-2, 1$, con $m_{-2}=1$ e $m_1=2$. Dunque, certamente si ha $\dim V_{-2} = m_{-2} = 1$, mentre $1 \leq \dim V_1 \leq m_1 = 2$ e g è semplice se $\dim V_1 = m_1 = 2$. Sia, perciò, $T=1$. Sappiamo che $V_1 = \operatorname{Ker} g_1$, dove $g_1 = g - i$ e:

$$M(g_1) = M(g) - I = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{riducendo}} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

In questo caso, $\rho(M(g_1)) = 2$, per cui $\dim V_1 = \dim \operatorname{Ker} g_1 = 3-2 = 1 < 2 = m_1$, per cui possiamo dire che per $h=2$ l'endomorfismo g non è semplice.

Sia $h = \frac{1}{2}$. In questo caso gli autovalori sono $-\frac{1}{2}, 1$, con $m_1 = 1$ e $m_{-\frac{1}{2}} = 2$. Dunque, certamente si ha $\dim V_1 = m_1 = 1$, mentre $1 \leq \dim V_{-\frac{1}{2}} \leq m_{-\frac{1}{2}} = 2$ e g è semplice se $\dim V_{-\frac{1}{2}} = m_{-\frac{1}{2}} = 2$. Sia, perciò, $T = -\frac{1}{2}$. Sappiamo che $V_{-\frac{1}{2}} = \operatorname{Ker} g_{-\frac{1}{2}}$, dove $g_{\frac{1}{2}} = g + \frac{1}{2}i$ e:

$$M(g_{-\frac{1}{2}}) = M(g) + \tfrac{1}{2}I = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 & 1 \\ 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{riducendo}} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 & 1 \\ \frac{3}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

In questo caso, $\rho(M(g_{-\frac{1}{2}})) = 2$, per cui $\dim V_{-\frac{1}{2}} = \dim \operatorname{Ker} g_{-\frac{1}{2}} = 3-2 = 1 < 2 = m_{-\frac{1}{2}}$, per cui possiamo dire che per $h = \frac{1}{2}$ l'endomorfismo g non è semplice.

1. È assegnato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}, u$. Sono dati la retta:
$$r\colon \begin{cases} x - y + z - 1 = 0 \\ 2x + y - 3z + 4 = 0 \end{cases}$$
e il piano $\pi\colon x + y - 2z + 1 = 0$. Determinare la retta s passante per l'origine O, ortogonale alla retta r e parallela al piano π. Determinare il piano α contenente r e ortogonale a π. Stabilire la natura della posizione reciproca di s e α.

2. È assegnato nel piano un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $O, \vec{x}, \vec{y}, u$. Studiare il fascio di coniche di equazione:
$$x^2 + 2hxy + y^2 - 2hx - 1 = 0,$$
determinandone, in particolare, punti base e coniche spezzate. Determinare la natura della conica del fascio passante per il punto improprio $(1, -1, 0)$.

Soluzione

1. È facile vedere che $(2, 5, 3)$ sono parametri direttori della retta r. Se (l, m, n) sono parametri direttori di s, allora il vettore di componenti (l, m, n) è ortogonale ai vettori di componenti $(2, 5, 3)$ e $(1, 1, -2)$. Questo vuol dire che deve essere:
$$\begin{cases} 2l + 5m + 3n = 0 \\ l + m - 2n = 0. \end{cases}$$
Da questo segue che $(-13, 7, -3)$ sono parametri direttori di s, per cui:
$$s\colon \frac{x}{-13} = \frac{y}{7} = \frac{z}{-3} \Rightarrow s\colon \begin{cases} 7x + 13y = 0 \\ 3x - 13z = 0. \end{cases}$$
I piani contenenti la retta r hanno equazione:
$$\lambda(x - y + z - 1) + \mu(2x + y - 3z + 4) = 0 \Rightarrow (\lambda + 2\mu)x + (-\lambda + \mu)y + (\lambda - 3\mu)z - \lambda + 4\mu = 0.$$
Vogliamo che i vettori di componenti $(\lambda + 2\mu, -\lambda + \mu, \lambda - 3\mu)$ e $(1, 1, -2)$ siano ortogonali tra loro, per cui:
$$\lambda + 2\mu - \lambda + \mu - 2\lambda + 6\mu = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{9}{2}\mu.$$
Prendiamo $\lambda = 9$ e $\mu = 2$:
$$\alpha\colon 13x - 7y + 3z - 1 = 0.$$
Ovviamente, la retta s e il piano α sono ortogonali tra loro.

2. La conica nascosta del fascio è la conica spezzata di equazione $x(y - 1) = 0$. Inoltre:
$$B = \begin{pmatrix} 1 & h & -h \\ h & 1 & 0 \\ -h & 0 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow |B| = -1.$$
Dal momento che $|B| \neq 0$ per ogni $h \in \mathbb{R}$, possiamo dire che la conica nascosta è l'unica conica spezzata del fascio. Per determinare i punti base intersechiamo questa conica spezzata con una qualsiasi conica del fascio, per esempio quella che si ottiene per $h = 0$:
$$\begin{cases} x(y - 1) = 0 \\ x^2 + y^2 - 1 = 0. \end{cases}$$
Otteniamo che i punti base sono $(0, -1)$ e $(0, 1)$, quest'ultimo contato 3 volte. Ciò significa che le coniche del fascio si osculano. Inoltre, essendo:
$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & h \\ h & 1 \end{vmatrix} = 1 - h^2,$$

vediamo che per $-1 < h < 1$ abbiamo delle ellissi, tra le quali figura una circonferenza per $h = 0$; per $h = \pm 1$ abbiamo delle parabole; per $h < -1$ e $h > 1$ abbiamo delle iperboli, nessuna delle quali è equilatera.

Infine, per determinare la conica del fascio passante per il punto improprio dato, scriviamo l'equazione del fascio in coordinate omogenee:

$$x^2 + 2hxy + y^2 - 2hxt - t^2 = 0$$

e imponiamo il passaggio per $(1, -1, 0)$:

$$1 - 2h + 1 = 0 \Rightarrow h = 1.$$

Dalla classificazione precedente, la conica del fascio passante per il punto improprio $(1, -1, 0)$ è una parabola.