Corso di Laurea in Ingegneria Informatica (A-Co, Cp-I e J-Pr) e Ingegneria Elettronica (A-Co, Cp-I e J-Pr)

Prova di **Algebra lineare e Geometria**- Appello 15 Luglio 2022

Durata della prova: 90 minuti.
È vietato uscire dall'aula prima di aver consegnato definitivamente il compito.
È vietato consultare libri o appunti.

I

1. Sia $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definita dalle assegnazioni:

$$\begin{aligned} f(0,1,0) &= (0,-h,-h) \\ f(1,1,0) &= (1,2,1) \\ f(0,1,1) &= (0,0,0). \end{aligned}$$

Studiare la semplicità di f al variare di $h \in \mathbb{R}$, determinando, ove possibile, una base di autovettori per f.

2. Sia $g\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione definita da:

$$g(x,y,z) = (2x+2y-z, x+hy+z, hx+y+z),$$

al variare di $h \in \mathbb{R}$. Dato $V = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid y-z=0\right\}$, determinare il valore di $h \in \mathbb{R}$ per il quale $g|_V$ induce un endomorfismo $\varphi\colon V \to V$. Studiare la semplicità di φ, determinando, se possibile, una base di autovettori di V per φ.

Soluzione

1. Non è difficile vedere che:

$$M(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ h+2 & -h & h \\ h+1 & -h & h \end{pmatrix},$$

per cui:

$$P(T) = \begin{vmatrix} 1-T & 0 & 0 \\ h+2 & -h-T & h \\ h+1 & -h & h-T \end{vmatrix} = (1-T)T^2.$$

Questo vuol dire che gli autovalori sono 0 e 1, con $m_0 = 2$ e $m_1 = 1$. Necessariamente si ha $\dim V_1 = m_1 = 1$, mentre $1 \leq \dim V_0 \leq m_0 = 2$, per cui possiamo dire che f è semplice se $\dim V_0 = m_0 = 2$.

Sia, dunque, $T = 0$. Sappiamo che $V_0 = \operatorname{Ker} f$. Da:

$$M(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ h+2 & -h & h \\ h+1 & -h & h \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{riducendo}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -h & h \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

vediamo che per $h \neq 0$ si ha $\rho(M(f) = 2$, per cui $\dim V_0 = 3-2 = 1 < 2 = m_0$. Questa vuol dire che per $h \neq 0$ f non è semplice. Invece, per $h = 0$ abbiamo $\rho(M(f)) = 1$, per cui $\dim V_0 = 3-1 = 2 = m_0$. Questo vuol dire che per $h = 0$ f è semplice ed è possibile determinare una base di autovettori. Dalla matrice precedente vediamo che:

$$V_0 = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = 0\right\} = \mathcal{L}((0,1,0),(0,0,1)).$$

Sia $T = 1$ e $h = 0$. In tal caso, $V_1 = \operatorname{Ker} f_1$, dove $f_1 = f - i$ e:

$$M(f_1) = M(f) - I = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

per cui:

$$V_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x - y = 0,\ x - z = 0\} = \mathcal{L}((1, 2, 1)).$$

Dunque, una base di autovettori è $[(0, 1, 0), (0, 0, 1), (1, 2, 1)]$.

2. Sappiamo che $g|_V$ induce un endomorfismo $\varphi\colon V \to V$ se $g(V) \subseteq V$. Inoltre, essendo $V = \mathcal{L}((1, 0, 0), (0, 1, 1))$, abbiamo:

$$g(V) = \mathcal{L}(g(1, 0, 0), g(0, 1, 1)) = \mathcal{L}((2, 1, h), (1, h + 1, 2)).$$

È immediato vedere che $(2, 1, h), (1, h + 1, 2) \in V$ solo se $h = 1$. Quindi, è per $h = 1$ che la restrizione $g|_V$ induce un endomorfismo $\varphi\colon V \to V$ e si ha:

$$\begin{aligned} \varphi(1, 0, 0) &= g(1, 0, 0) = (2, 1, 1) \\ \varphi(0, 1, 1) &= g(0, 1, 1) = (1, 2, 2). \end{aligned}$$

Sia $\mathcal{A} = [(1, 0, 0), (0, 1, 1)]$. Chiaramente abbiamo:

$$\begin{aligned} \varphi(1, 0, 0) &= (2, 1, 1) = 2(1, 0, 0) + (0, 1, 1) \Rightarrow [\varphi(1, 0, 0)]_{\mathcal{A}} = (2, 1) \\ \varphi(0, 1, 1) &= (1, 2, 2) = (1, 0, 0) + 2(0, 1, 1) \Rightarrow [\varphi(0, 1, 1)]_{\mathcal{A}} = (1, 2). \end{aligned}$$

Questo vuol dire che:

$$M^{\mathcal{A}}(g) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Quindi:

$$P(T) = \begin{vmatrix} 2 - T & 1 \\ 1 & 2 - T \end{vmatrix} = (T - 1)(T - 3).$$

Gli autovalori sono 1 e 3, entrambi di molteplicità 1, per cui φ è semplice.

Sia $T = 1$. In tal caso, $V_1 = \operatorname{Ker} \varphi_1$, dove $\varphi_1 = \varphi - i$ e:

$$M^{\mathcal{A}}(\varphi_1) = M^{\mathcal{A}}(\varphi) - I = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Quindi:

$$V_1 = \{v \in V \mid [v]_{\mathcal{A}} = (a, b),\ a + b = 0\} = \mathcal{L}((1, 0, 0) - (0, 1, 1)) = \mathcal{L}((1, -1, -1)).$$

Sia $T = 3$. In tal caso, $V_3 = \operatorname{Ker} \varphi_3$, dove $\varphi_3 = \varphi - 3i$ e:

$$M^{\mathcal{A}}(\varphi_3) = M^{\mathcal{A}}(\varphi) - 3I = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Quindi:

$$V_3 = \{v \in V \mid [v]_{\mathcal{A}} = (a, b),\ a - b = 0\} = \mathcal{L}((1, 0, 0) + (0, 1, 1)) = \mathcal{L}((1, 1, 1)).$$

Dunque, una base di autovettori di V per φ è $[(1, -1, -1), (1, 1, 1)]$.

II

1. È assegnato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}, u$. Sono dati la retta:

$$r\colon \begin{cases} x = 1 \\ y = z \end{cases}$$

e il piano $\pi\colon 2x - y - z - 2 = 0$. Determinare la retta r' simmetrica di r rispetto al piano π.

2. È assegnato nel piano un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $O, \vec{x}, \vec{y}, u$. Studiare il fascio di coniche di equazione:

$$hx^2 + (4-2h)xy + y^2 + 2hx + 2y = 0,$$

determinandone, in particolare, punti base e coniche spezzate. Determinare la natura della conica del fascio tangente alla bisettrice del primo e terzo quadrante.

Soluzione

1. Dal sistema:

$$r \cap \pi \colon \begin{cases} x = 1 \\ y = z \\ 2x - y - z - 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

vediamo che r e π sono incidenti e che $r \cap \pi = P$, dove $P = (1,0,0)$. Dunque, $P \in r'$. Sia $Q \in r$, per esempio $Q = (1,1,1)$, e sia s la retta passante per Q e ortogonale a π:

$$s \colon \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 1 - t \\ z = 1 - t. \end{cases}$$

Calcoliamo $H = s \cap \pi$:

$$H = s \cap \pi \colon \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 1 - t \\ z = 1 - t \\ 2x - y - z - 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{5}{3} \\ y = \dfrac{2}{3} \\ z = \dfrac{2}{3}. \end{cases}$$

Dunque, $H = (\frac{5}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3})$. Sia $Q' = (a,b,c)$ il punto simmetrico di Q rispetto ad H. Deve essere:

$$\begin{cases} \dfrac{a+1}{2} = \dfrac{5}{3} \\ \dfrac{b+1}{2} = \dfrac{2}{3} \\ \dfrac{c+1}{2} = \dfrac{2}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \dfrac{7}{3} \\ b = \dfrac{1}{3} \\ c = \dfrac{1}{3}. \end{cases}$$

Dunque, $Q' = (\frac{7}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$. La retta r' è la retta passante per $P = (1,0,0)$ e per Q':

$$\frac{x-1}{\frac{4}{3}} = \frac{y}{\frac{1}{3}} = \frac{z}{\frac{1}{3}} \Rightarrow r' \colon \begin{cases} y - z = 0 \\ x - 4y - 1 = 0. \end{cases}$$

2. Osserviamo che la conica nascosta del fascio è la conica spezzata di equazione $x(x-2y+2) = 0$. Da:

$$B = \begin{pmatrix} h & 2-h & h \\ 2-h & 1 & 1 \\ h & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

vediamo che $|B| = -3h^2 + 3h$, per cui le altre coniche spezzate del fascio si ottengono per $h = 0$ e $h = 1$. Per $h = 0$ abbiamo la conica $y(4x + y + 2) = 0$ e per $h = 1$ la conica $(x+y)(x+y+2) = 0$. I punti base sono i punti comuni a tutte le coniche del fascio:

$$\begin{cases} x(x - 2y + 2) = 0 \\ (x+y)(x+y+2) = 0 \end{cases}$$

per cui sono i punti $(0,0)$, $(0,-2)$, $(-2,0)$ e $(-\frac{2}{3}, \frac{2}{3})$. Sia $h \neq 0, 1$. In tal caso le coniche del fascio sono irriducibili. Essendo $|A| = -(h-1)(h-4)$ abbiamo che per $h = 4$ abbiamo una parabola, mentre per $h = 1$ la conica è spezzata. Per $1 < h < 4$ abbiamo delle ellissi, tutte reali in quanto i punti base sono reali e nessuna delle quali è una circonferenza. Per $h < 1$, $h \neq 0$, e $h > 4$ abbiamo delle iperboli, tra le quali abbiamo una equilatera per $h = -1$.

Facciamo l'intersezione della generica conica del fascio con la retta $x - y = 0$:

$$\begin{cases} x - y = 0 \\ hx^2 + (4-2h)xy + y^2 + 2hx + 2y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = x \\ (5-h)x^2 + (2h+2)x = 0. \end{cases}$$

La retta è tangente se l'intersezione è data da due punti coincidenti. Ciò, dunque, avviene se $2h + 2 = 0$, cioè per $h = -1$, valore per cui, in base alla precedente classificazione, abbiamo un'iperbole equilatera.