Corso di Laurea in
Ingegneria Industriale

Prova scritta di **Algebra lineare e Geometria**- 13 Luglio 2022

Durata della prova: 1 ora e 30.
È vietato uscire dall'aula prima di aver consegnato definitivamente il compito.
È vietato consultare libri o appunti.

I

Sia $V = \mathcal{L}(v_1, v_2, v_3) \subset \mathbb{R}^4$, essendo $v_1 = (1,0,1,0)$, $v_2 = (0,1,0,0)$ e $v_3 = (0,0,0,1)$. È dato l'endomorfismo $f : V \to V$ definito da:

$$\begin{aligned} f(v_1) &= 2v_1 - v_2 + v_3 \\ f(v_2) &= v_2 \\ f(v_3) &= v_1 + hv_2 + 2v_3, \end{aligned}$$

con $h \in \mathbb{R}$.

1. Studiare la semplicità di f al variare di $h \in \mathbb{R}$, determinando, ove possibile, una base di autovettori per f.
2. Dati $U = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid x - y + ht = 0,\ z - ht = 0\}$ e $W = \mathcal{L}((1,h,0,0),(0,h,0,h))$, calcolare $U + W$ e $U \cap W$ al variare di $h \in \mathbb{R}$, specificando, in particolare, se la somma è diretta o meno.

Soluzione

1. È immediato vedere che $\mathcal{A} = [v_1, v_2, v_3]$ è una base di V e che:

$$M^{\mathcal{A}}(f) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & h \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Dunque:

$$P(T) = \begin{vmatrix} 2-T & 0 & 1 \\ -1 & 1-T & h \\ 1 & 0 & 2-T \end{vmatrix} = (1-T)^2(3-T).$$

Ciò vuol dire che gli autovalori sono 1 e 3, con $m_1 = 2$ e $m_3 = 1$. Sappiamo che necessariamente si ha $\dim V_3 = m_3 = 1$, mentre $1 \leq \dim V_1 \leq 2 = m_1$ e f è semplice se $\dim V_1 = m_1 = 2$.

Sia, dunque, $T = 1$. Sappiamo che $V_1 = \operatorname{Ker} f_1$, dove $f_1 = f - i$ e:

$$M^{\mathcal{A}}(f_1) = M^{\mathcal{A}}(f) - I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & h \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{riducendo}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & h+1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Quindi, $\rho(M^{\mathcal{A}}(f_1)) = 2$ per $h \neq -1$, per cui, in tal caso, si ha $\dim V_1 = 3 - 2 = 1 < 2 = m_1$. Ciò vuol dire che per $h \neq -1$ f non è semplice. Invece, per $h = -1$ si ha $\rho(M^{\mathcal{A}}(f_1)) = 3 - 1 = 2 = m_1$, per cui per $h = -1$ f è semplice ed è possibile determinare, per tale valore di h, una base di autovettori per f. Calcoliamo V_1:

$$\begin{aligned} V_1 = \{v \in V \mid [v]_{\mathcal{A}} = (a,b,c),\ a + b = 0\} = \{v \in V \mid [v]_{\mathcal{A}} = (a,b,-a)\} = \mathcal{L}(v_1 - v_3, v_2) = \\ = \mathcal{L}((1,0,1,-1),(0,1,0,0)). \end{aligned}$$

Sia $T = 3$ e $h = -1$. In questo caso, si ha $V_3 = \operatorname{Ker} f_3$, dove $f_3 = f - 3i$ e:

$$M^{\mathcal{A}}(f_3) = M^{\mathcal{A}}(f) - 3I = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{riducendo}} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dunque:

$$V_3 = \{v \in V \mid [v]_{\mathcal{A}} = (a, b, c),\ -a + c = 0,\ -2b - 2c = 0\} = \{v \in V \mid [v]_{\mathcal{A}} = (c, -c, c)\} =$$
$$= \mathcal{L}(v_1 - v_2 + v_3) = \mathcal{L}((1, -1, 1, 1)).$$

2. È immediato osservare che $\dim U = 2$ per ogni $h \in \mathbb{R}$, mentre $\dim W = 2$ per $h \neq 0$ e $\dim W = 1$ per $h = 0$. Poi, dal momento che:

$$U = \left\{(y - ht, y, ht, t) \in \mathbb{R}^4\right\} = \mathcal{L}((1, 1, 0, 0), (-h, 0, h, 1)),$$

si ha:

$$U + W = \mathcal{L}((-h, 0, h, 1), (1, 1, 0, 0), (1, h, 0, 0), (0, h, 0, h)).$$

Da:

$$\begin{pmatrix} -h & 0 & h & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & h & 0 & 0 \\ 0 & h & 0 & h \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{riducendo, per } h \neq 1} \begin{pmatrix} -h & 0 & h & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & h-1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & h \end{pmatrix}$$

vediamo che per $h \neq 0, 1$ si ha $\dim(U + W) = 4$, per cui, essendo $U + W \subseteq \mathbb{R}^4$, si ha $U + W = \mathbb{R}^4$. Dalla formula di Grassmann abbiamo:

$$\dim(U \cap W) = \dim U + \dim W - \dim(U + W) = 2 + 2 - 4 = 0 \Rightarrow U \cap W = \{(0, 0, 0, 0)\}.$$

Questo vuol dire, in particolare, che per $h \neq 0, 1$ si ha $U \oplus W = \mathbb{R}^4$.

Dalla matrice precedente osserviamo anche che per $h = 0$ si ha $\dim(U + W) = 3$ e, inoltre, che $[(0, 0, 0, 1), (1, 1, 0, 0), (0, -1, 0, 0)]$ è una base di $U + W$. Nuovamente, dalla formula di Grassmann abbiamo:

$$\dim(U \cap W) = \dim U + \dim W - \dim(U + W) = 2 + 1 - 3 = 0 \Rightarrow U \cap W = \{(0, 0, 0, 0)\},$$

per cui anche per $h = 0$ la somma $U + W$ è diretta.

Sia $h = 1$. In tal caso, abbiamo:

$$U = \mathcal{L}((-1, 0, 1, 1), (1, 1, 0, 0)) \quad \text{e} \quad W = \mathcal{L}((1, 1, 0, 0), (0, 1, 0, 1)).$$

Quindi:

$$U + W = \mathcal{L}((-1, 0, 1, 1), (1, 1, 0, 0), (0, 1, 0, 1)).$$

Dato che la seguente matrice ha rango 3:

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

i tre vettori sono linearmente indipendenti ed individuano, perciò, una base di $U + W$. Questo vuol dire che $\dim(U + W) = 3$ e dalla formula di Grassmann abbiamo:

$$\dim(U \cap W) = \dim U + \dim W - \dim(U + W) = 2 + 2 - 3 = 1.$$

Dal momento che, chiaramente, $(1, 1, 0, 0) \in U$ e $(1, 1, 0, 0) \in W$, vediamo che $(1, 1, 0, 0) \in U \cap W$. Essendo $\dim(U \cap W) = 1$, segue che $U \cap W = \mathcal{L}((1, 1, 0, 0))$.

II

1. È assegnato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}, u$. Sono dati le rette

$$r\colon \begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \end{cases} \quad \text{e} \quad s\colon \begin{cases} y = 2 \\ z = 0. \end{cases}$$

Determinare le equazioni della retta p ortogonale e incidente le rette r e s.

2. È assegnato nel piano un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $O, \vec{x}, \vec{y}, u$. Determinare e studiare il fascio di coniche passanti per i punti $A = (0,1)$, $B = (0,0)$, $C = (-1,0)$ e $D = (1,1)$. Data $\Gamma\colon x^2 + y^2 - 2 = 0$, determinare la conica del fascio avente in comune con Γ la retta tangente in D.

Soluzione

1. Il generico punto della retta r è $R = (0,1,a)$, mentre il generico punto della retta s è $S = (b,2,0)$, per qualche $a, b \in \mathbb{R}$. La retta p passa per un punto $R \in r$ e $S \in s$, per cui ha parametri direttori del tipo $(b, 1, -a)$, per qualche $a, b \in \mathbb{R}$. Dovendo essere la retta p ortogonale alle rette r e s, si ha che il vettore di componenti $(b, 1 - a)$ deve essere ortogonale ai vettori di componenti $(0,0,1)$ e $(1,0,0)$. Questo vuol dire che deve essere $a = 0$ e $b = 0$. Quindi, la retta p cercata passa per i punti $(0,1,0)$ e $(0,2,0)$, per cui:

$$p\colon \begin{cases} x = 0 \\ z = 0. \end{cases}$$

2. Le coniche spezzate del fascio sono le coniche $AB \cup CD\colon x(x - 2y + 1) = 0$, $AC \cup BD\colon (x - y)(x - y + 1) = 0$ e $AD \cup BC\colon y(y - 1) = 0$. Quindi, possiamo scrivere il fascio di coniche:

$$hy(y-1) + x(x - 2y + 1) = 0 \Rightarrow x^2 - 2xy + hy^2 + x - hy = 0.$$

Quindi:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & \dfrac{1}{2} \\ -1 & h & -\dfrac{h}{2} \\ \dfrac{1}{2} & -\dfrac{h}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

e, essendo $|B| = \frac{h-h^2}{4}$, vediamo che per $h \neq 0, 1$ abbiamo coniche irriducibili, mentre per $h = 0$ e $h = 1$ abbiamo le coniche spezzate. Per $h = 0$ la conica è, naturalmente, $AB \cup CD$, mentre per $h = 1$ otteniamo necessariamente quella di equazione $AC \cup BD$. Inoltre, essendo:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & h \end{vmatrix} = h - 1,$$

otteniamo subito che per $h > 1$ abbiamo delle ellissi, tutte reali in quanti i punti base sono reali e tra le quali non figurano circonferenze. Per $h = 1$ abbiamo una conica spezzata, per cui non vi sono parabole nel fascio. Per $h < 1$ abbiamo delle iperboli, tra le quali una equilatera si ottiene per $h = -1$.

Osserviamo che la retta tangente a Γ nel punto D si ottiene da:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow x + y - 2 = 0.$$

La retta tangente in D alla generica conica del fascio si ottiene da:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & \frac{1}{2} \\ -1 & h & -\frac{h}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{h}{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}x + \left(-1 + \frac{h}{2}\right) y + \frac{1}{2} - \frac{h}{2} = 0 \Rightarrow x + (h-2)y + 1 - h = 0.$$

Affinché le due rette di equazioni $x + y - 2 = 0$ e $x + (h-2)y + 1 - h = 0$ coincidano deve essere:

$$\begin{cases} h - 2 = 1 \\ 1 - h = -2 \end{cases} \Rightarrow h = 3.$$

Questo vuol dire che la conica cercata ha equazione:

$$x^2 - 2xy + 3y^2 + x - 3y = 0.$$