Corso di Laurea in Ingegneria Industriale (F-O)

Prova scritta di **Algebra lineare e Geometria**- 11 Novembre 2022

Durata della prova: 1 ora e 30.
È vietato uscire dall'aula prima di aver consegnato definitivamente il compito.
È vietato consultare libri o appunti.

I

È dato l'endomorfismo $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definita da:

$$f(x,y,z) = (hx + y + z, x + hy + z, -x - y - 2z),$$

per ogni $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, con $h \in \mathbb{R}$.

1. Determinare il valore di $h \in \mathbb{R}$ per il quale -1 è autovalore per f e per tale valore di h studiare la semplicità di f, determinando, se possibile, una base di autovettori per f.
2. Calcolare $f^{-1}(1,1,0)$ e $f^{-1}(V)$, essendo $V = \mathcal{L}(1,1,0)$, specificandone in ciascun caso la dimensione.

Soluzione

1. Affinché -1 sia autovalore per f deve accadere che:

$$|M(f) + I| = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} h+1 & 1 & 1 \\ 1 & h+1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow -h^2 = 0.$$

Quindi, il valore di h cercato è $h = 0$. In tal caso, si ha:

$$P(T) = \begin{vmatrix} -T & 1 & 1 \\ 1 & -T & 1 \\ -1 & -1 & -2-T \end{vmatrix} = -T(T+1)^2.$$

Quindi, gli autovalori sono 0 e -1, con $m_0 = 1$ e $m_{-1} = 2$, per cui possiamo dire che f è semplice per $h = 0$ se $\dim V_{-1} = m_{-1} = 2$. Sia, dunque, $T = 1$. Sappiamo che $V_{-1} = \operatorname{Ker} f_{-1}$, dove $f_{-1} = f + i$ e:

$$M(f_{-1}) = M(f) + I = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix},$$

per cui è evidente che $\dim V_{-1} = 3 - \rho(M(f_{-1})) = 3 - 1 = 2 = m_{-1}$. Ciò vuol dire che f è semplice e dalla matrice precedente ricaviamo subito che:

$$V_{-1} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 0\} = \mathcal{L}((1,0,-1),(0,1,-1)).$$

Sia $T = 0$. In tal caso, sappiamo che $V_0 = \operatorname{Ker} f$. Essendo:

$$M(f) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{riducendo}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

abbiamo:

$$V_0 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid y + z = 0,\ x + z = 0\} = \mathcal{L}((-1,-1,1)).$$

Quindi, per $h = 0$ un base di autovettori è $[(1,0,-1),(0,1,-1),(-1,-1,1)]$.

2. Per calcolare $f^{-1}(1,1,0)$ occorre risolvere il sistema la cui matrice completa associata è:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} h & 1 & 1 & 1 \\ 1 & h & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -2 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{riducendo, per } h\neq 1} \left(\begin{array}{ccc|c} h & 1 & 1 & 1 \\ 1-h & h-1 & 0 & 0 \\ 2h & 0 & 0 & 2 \end{array}\right).$$

Quindi, è evidente che il sistema è impossibile per $h=0$, il che vuol dire che evidentemente in questo caso $f^{-1}(1,1,0)=\emptyset$. Sia $h \neq 0,1$. In questo caso:

$$\begin{cases} hx+y+z=1 \\ (1-h)x+(h-1)y=0 \\ 2hx=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\dfrac{1}{h} \\ y=\dfrac{1}{h} \\ z=-\dfrac{1}{h}. \end{cases}$$

Quindi, per $h \neq 0,1$ abbiamo:

$$f^{-1}(1,1,0)=\left\{\left(\frac{1}{h},\frac{1}{h},-\frac{1}{h}\right)\right\}.$$

Sia $h=1$. In questo caso, il sistema diventa:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -2 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{riducendo}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right),$$

per cui si ha:

$$\begin{cases} x+y+z=1 \\ -z=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=2-x \\ z=-1. \end{cases}$$

Dunque, per $h=1$ si ha:

$$f^{-1}(1,1,0)=\left\{(x,2-x,-1)\in\mathbb{R}^3\right\}.$$

Per calcolare $f^{-1}(V)$ occorrono le equazioni cartesiane di V:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ x & y & z \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{riducendo}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ x-y & 0 & z \end{pmatrix}.$$

Dunque:

$$V=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 x-y=0,\ z=0\right\},$$

per cui:

$$f^{-1}(V)=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid f(x,y,z)\in V\right\}=\left\{(h-1)x+(1-h)y=0,\ -x-y-2z=0\right\}.$$

È evidente che $\dim f^{-1}(V)=1$ per $h\neq 1$, mentre $\dim f(V)=2$ per $h=1$.

II

1. È assegnato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $O,\vec{x},\vec{y},\vec{z},u$. Sono dati i piani $\pi_1\colon x-y-z+1=0$ e $\pi_2\colon 2x+y-3z+2=0$. Determinare la retta r passante per l'origine O e parallela ai piani π_1 e π_2. Calcolare $d(r,\pi_1)$ e $d(r,\pi_2)$.

2. È assegnato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $O,\vec{x},\vec{y},\vec{z},u$. Data la conica:

$$\Gamma\colon \begin{cases} x^2-y^2-4=0 \\ z=0, \end{cases}$$

determinare e studiare le quadriche contenenti Γ e passanti per i punti $A=(0,0,-1)$, $B=(0,2,1)$ e $C=(0,-2,1)$.

Soluzione

1. La retta r è intersezione dei piani α e β paralleli a π_1e π_2 e passanti per O. Essendo, ovviamente, i piani di equazioni, rispettivamente, $x-y-z=0$ e $2x+y-3z=0$, si ha che:
$$r\colon \begin{cases} x-y-z=0 \\ 2x+y-3z=0. \end{cases}$$
Inoltre, essendo r parallela a entrambi i piani, si ha:
$$d(r,\pi_1)=d(O,\pi_1)=\frac{1}{\sqrt{3}} \quad \text{e} \quad d(r,\pi_2)=d(O,\pi_2)=\frac{2}{\sqrt{14}}.$$

2. La generica quadrica contenente la conica data ha equazione:
$$x^2-y^2-4+z(ax+by+cz+d)=0.$$
Imponendo il passaggio per i tre punti dati, otteniamo il seguente sistema:
$$\begin{cases} c-d-4=0 \\ 2b+c+d-8=0 \\ -2b+c+d-8=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b=0 \\ c=6 \\ d=2. \end{cases}$$
Dunque, le quadriche cercata hanno equazione:
$$x^2-y^2+axz+6z^2+2z-4=0$$
e le matrici associate sono:
$$B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{a}{2} & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ \frac{a}{2} & 0 & 6 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -4 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{a}{2} \\ 0 & -1 & 0 \\ \frac{a}{2} & 0 & 6 \end{pmatrix}.$$
Essendo $|B|=25-a^2$ e $|A|=-6+\frac{a^2}{4}\neq 0$, vediamo che per $a=\pm 5$ abbiamo due coni, poiché $|A|\neq 0$ e $|B|=0$; per $a=\pm 2\sqrt{6}$ abbiamo $|A|=0$ e $|B|>0$, per cui abbiamo due paraboloidi iperbolici; per $a<-5$ e $a>5$ abbiamo $|B|<0$ e $|A|\neq 0$, per cui le quadriche sono necessariamente degli iperboloidi ellittici e non degli ellissoidi, in quanto la conica data è un'iperbole; per $-5<a<5$ e $a\neq \pm 2\sqrt{6}$ abbiamo $|B|>0$ e $|A|\neq 0$, per cui abbiamo degli iperboloidi iperbolici e non degli ellissoidi immaginari in quanto le quadriche contengono punti reali.