# Corso di Laurea in
# Ingegneria Informatica (J-Pr) e Ingegneria Elettronica (J-Pr)

Prova di **Algebra lineare e Geometria**- Appello 3 Maggio 2021

---

*Durata della prova: 90 minuti.*
*È vietato allontanarsi prima di aver consegnato definitivamente il compito.*
*È vietato consultare libri o appunti.*

---

**I**

È assegnato l'endomorfismo $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tale che:

$$\begin{aligned} f(1,0,1) =&(1-h, 2+h, 2)\\ f(0,1,1) =&(2-h, 1+h, 2)\\ f(0,1,0) =&(2,1,1) \end{aligned}$$

con $h \in \mathbb{R}$.

1. Determinare $M(f)$ e il valore di $h \in \mathbb{R}$ per il quale $(1,-1,1)$ è autovettore per $f$. Per tale valore di $h$ studiare la semplicità di $f$, determinando, se possibile, una base di autovettori.
2. Dato $V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x+y-z=0\}$, calcolare $f(V)$ al variare di $h \in \mathbb{R}$, specificandone la dimensione e determinandone la/le equazioni cartesiane per ogni $h \in \mathbb{R}$. Dato:

$$W = \mathcal{L}((h,-h,0),(3h,0,2h),(0,3h+3,2h+2)), \quad \forall h \in \mathbb{R},$$

mostrare che $W \subseteq f(V)$ per ogni $h \in \mathbb{R}$ e specificare per quali valori di $h \in \mathbb{R}$ i due sottospazi sono uguali.

*Soluzione*

1. È immediato vedere che:

$$M(f) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -h \\ 2 & 1 & h \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

per cui:

$$f(1,-1,1) = (-1-h, 1+h, 1).$$

Il vettore $(1,-1,1)$ è autovettore per $f$ se la seguente matrice ha rango 1:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1-h & 1+h & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{riducendo}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -h-2 & h+2 & 0. \end{pmatrix}$$

Dunque, il valore cercato è $h=-2$, caso in cui si ha:

$$f(1,-1,1) = (1,-1,1),$$

il che significa che per $h=-2$ $(1,-1,1)$ è autovettore associato all'autovalore 1. Andiamo a calcolare il polinomio caratteristico di $f$ nel caso $h=-2$:

$$P(T) = \begin{vmatrix} 1-T & 2 & 2 \\ 2 & 1-T & -2 \\ 1 & 1 & 1-T \end{vmatrix} = (1-T)(T^2-2T-3) = (1-T)(T+1)(T-3).$$

Quindi, gli autovalori sono $1, -1, 3$, tutti di molteplicità algebrica 1. Questo vuol dire che $f$ è semplice ed è possibile determinare una base di autovettori per $f$. Osserviamo che, dovendo essere necessariamente $\dim V_1 = m_1 = 1$ e avendo visto che $(1,-1,1) \in V_1$, possiamo subito concludere che $V_1 = \mathcal{L}((1,-1,1))$.

Sia $T = -1$. Sappiamo che $V_{-1} = \ker f_{-1}$, dove $f_{-1} = f + i$ e:

$$M(f_{-1}) = M(f) + I = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{riducendo}} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 4 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dunque:

$$V_{-1} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x + 2y + 2z = 0,\ 4x + 4y = 0\} = \mathcal{L}((1,-1,0)).$$

Sia $T = 3$. Sappiamo che $V_3 = \ker f_3$, dove $f_3 = f - 3i$ e:

$$M(f_3) = M(f) - 3I = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ 2 & -2 & -2 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{riducendo}} \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dunque:

$$V_3 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid -x + 3y = 0,\ -2x + 2y + 2z = 0\} = \mathcal{L}((3,1,2)).$$

Quindi, per $h = -2$ una base di autovettori per $f$ è data da $[(1,-1,1), (1,-1,0), (3,1,2)]$.

2. Essendo $V = \mathcal{L}((1,0,1), (0,1,1))$, possiamo dire che:

$$f(V) = \mathcal{L}(f(1,0,1), f(0,1,1)) = \mathcal{L}((1-h, 2+h, 2), (2-h, 1+h, 2)).$$

Cerchiamo la dimensione di $f(V)$, unitamente alla/alle equazioni cartesiane:

$$\begin{pmatrix} 1-h & 2+h & 2 \\ 2-h & 1+h & 2 \\ x & y & z \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{riducendo}} \begin{pmatrix} 1-h & 2+h & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ x + y - \frac{3}{2}z & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Quindi, $\dim f(V) = 2$ per ogni $h \in \mathbb{R}$ e si ha:

$$f(V) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x + 2y - 3z = 0\}.$$

Chiaramente $W \subseteq f(V)$, in quanto si vede facilmente che:

$$(h, -h, 0), (3h, 0, 2h), (0, 3h+3, 2h+2) \in f(V) \quad \forall h \in \mathbb{R}.$$

Per capire se $W = f(V)$, dobbiamo calcolarne la dimensione:

$$\begin{pmatrix} h & -h & 0 \\ 3h & 0 & 2h \\ 0 & 3h+3 & 2h+2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{riducendo, per } h \neq 0} \begin{pmatrix} h & -h & 0 \\ 3h & 0 & 2h \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Quindi, per $h \neq 0$, si ha $\dim W = 2 = \dim f(V)$. Ciò significa che per $h \neq 0$ si ha $W = f(V)$. Invece, per $h = 0$ si vede immediatamente che $\dim W = 1$, per cui in tal caso $W \subsetneq f(V)$.

## II

1. È assegnato nel piano un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $O, \vec{x}, \vec{y}, u$. Studiare il fascio di coniche di equazione:

$$x^2 - 2hxy + hy^2 - 2x + 1 = 0,$$

determinandone, in particolare, punti base e coniche spezzate. Determinare una forma canonica della parabola del fascio.

2. È assegnato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}, u$. Data la conica:

$$\begin{cases} x^2 - 2xy - 1 = 0 \\ z = 0, \end{cases}$$

determinare le equazioni del cono e del cilindro contenenti $\Gamma$ e aventi vertici, rispettivamente, $V = (-1, 1, -1)$ e $V' = (-1, 1, -1, 0)$.

*Soluzione*

1. È facile vedere che per $h = \infty$ abbiamo una conica spezzata, esattamente di equazione $y(2x - y) = 0$. Inoltre, essendo:

$$|B| = \begin{vmatrix} 1 & -h & -1 \\ -h & h & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -h^2,$$

vediamo che l'altra conica spezzata del fascio è quella che si ottiene per $h = 0$ ed ha equazione $(x-1)^2 = 0$. Invece, per $h \neq 0$ abbiamo delle coniche irriducibili.

Determiniamo i punti base del fascio intersecando le due coniche spezzate:

$$\begin{cases} y(2x - y) = 0 \\ (x-1)^2 = 0. \end{cases}$$

Otteniamo i punti $(1, 0)$ e $(1, 2)$, entrambi contati due volte. Inoltre, da:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -h \\ -h & h \end{vmatrix} = h - h^2,$$

vediamo che per $0 < h < 1$ abbiamo delle ellissi, tutte reali in quanto i punti base sono reali; tra tali ellissi non figurano circonferenze; per $h = 1$ abbiamo l'unica parabola del fascio, in quanto per $h = 0$ abbiamo una conica spezzata; per $h < 0$ e $h > 1$ abbiamo delle iperboli, tra le quali figura una equilatera per $h = -1$, in quanto $\mathrm{Tr}(A) = h + 1$.

Cerchiamo una forma canonica della parabola del fascio. Essa ha equazione:

$$x^2 - 2xy + y^2 - 2x + 1 = 0.$$

Dal momento che la parabola è la conica del fascio che si ottiene per $h = 1$, possiamo subito dire che $|B| = -1$ e $\mathrm{Tr}(A) = 2$. Una sua forma canonica è del tipo:

$$\beta Y^2 = 2\gamma X,$$

dove le matrici associate $B'$ e $A'$ sono tali che $|B'| = |B| = -1$ e $\mathrm{Tr}(A') = \mathrm{Tr}(A) = 1$. Quindi:

$$\begin{cases} -\beta\gamma^2 = -1 \\ \beta = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \beta = 2 \\ \gamma = \pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}. \end{cases}$$

Prendiamo $\beta = 2$ e $\gamma = \frac{\sqrt{2}}{2}$. In questo modo otteniamo che una forma canonica della parabola è:

$$2Y^2 = \sqrt{2}X^2 \Rightarrow Y^2 = \frac{\sqrt{2}}{2}X.$$

2. Le quadriche contenenti la conica $\Gamma$ hanno equazione:

$$x^2 - 2xy - 1 + z(ax + by + cz + d) = 0 \Rightarrow x^2 - 2xy + axz + byz + cz^2 + dz - 1 = 0.$$

Quindi, la matrice associata è:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & \frac{a}{2} & 0 \\ -1 & 0 & \frac{b}{2} & 0 \\ \frac{a}{2} & \frac{b}{2} & c & \frac{d}{2} \\ 0 & 0 & \frac{d}{2} & -1 \end{pmatrix}.$$

Il punto $V$ è vertice se:

$$B \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & \frac{a}{2} & 0 \\ -1 & 0 & \frac{b}{2} & 0 \\ \frac{a}{2} & \frac{b}{2} & c & \frac{d}{2} \\ 0 & 0 & \frac{d}{2} & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -1 - 1 - \frac{a}{2} = 0 \\ 1 - \frac{b}{2} = 0 \\ -\frac{a}{2} + \frac{b}{2} - c + \frac{d}{2} = 0 \\ -\frac{d}{2} - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -4 \\ b = 2 \\ c = 2 \\ d = -2. \end{cases}$$

Questo vuol dire che il cono cercato ha equazione:

$$x^2 - 2xy - 4xz + 2yz + 2z^2 - 2z - 1 = 0.$$

Analogamente, il punto $V'$ è vertice se:

$$B \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & \frac{a}{2} & 0 \\ -1 & 0 & \frac{b}{2} & 0 \\ \frac{a}{2} & \frac{b}{2} & c & \frac{d}{2} \\ 0 & 0 & \frac{d}{2} & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -1 - 1 - \frac{a}{2} = 0 \\ 1 - \frac{b}{2} = 0 \\ -\frac{a}{2} + \frac{b}{2} - c = 0 \\ -\frac{d}{2} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -4 \\ b = 2 \\ c = 3 \\ d = 0. \end{cases}$$

Questo vuol dire che il cilindro cercato ha equazione:

$$x^2 - 2xy - 4xz + 2yz + 3z^2 - 1 = 0.$$