Corso di Laurea in Ingegneria Industriale (A-E e F-O)

Prova di **Algebra lineare e Geometria**- Appello 3 Dicembre 2021

Durata della prova: 90 minuti.
È vietato uscire dall'aula prima di aver consegnato definitivamente il compito.
È vietato consultare libri o appunti.

I

Sono assegnati i vettori $v_1 = (1,2,0,0)$, $v_2 = (0,0,1,1)$, $v_3 = (0,0,2,1) \in \mathbb{R}^4$ e il sottospazio $V = \mathcal{L}(v_1, v_2, v_3) \subset \mathbb{R}^4$. È assegnato, inoltre, l'endomorfismo $f\colon V \to V$ definito dalle assegnazioni:

$$\begin{aligned} f(v_1) &= -v_1 + hv_2 \\ f(v_2) &= v_1 + (h-1)v_2 - v_3 \\ f(v_3) &= -v_1, \end{aligned}$$

al variare di $h \in \mathbb{R}$.

1. Studiare le semplicità di f, al variare di $h \in \mathbb{R}$, determinando, ove possibile, una base di autovettori per f.
2. Dato $W = \mathcal{L}(v_1 - v_3, v_2)$, mostrare che $f|_W$ induce un endomorfismo $g\colon W \to W$ per ogni valore di $h \in \mathbb{R}$. Studiare l'endomorfismo g al variare di $h \in \mathbb{R}$, determinando in ciascun caso, $\operatorname{Im} g$ e $\operatorname{Ker} g$.

Soluzione

1. È facile vedere che la matrice associata è:

$$M^{\mathcal{A}}(f) = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ h & h-1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix},$$

per cui

$$P(T) = \begin{vmatrix} -1-T & 1 & -1 \\ h & h-1-T & 0 \\ 0 & -1 & -T \end{vmatrix} = (-1-T)^2(h-T).$$

Questo vuol dire che, per $h \neq -1$ gli autovalori sono -1 e h, con $m_{-1} = 2$ e $m_h = 1$, mentre per $h = -1$ l'unico autovalore è -1 con $m_{-1} = 3$.

Sia $h = -1$. In tal caso, f è semplice se $\dim V_{-1} = m_{-1} = 3$, dove $V_{-1} = \operatorname{Ker} f_{-1}$, $f_{-1} = f + i$ e:

$$M^{\mathcal{A}}(f_{-1}) = M^{\mathcal{A}}(f) + I = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{riducendo}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dunque, possiamo dire che $\rho(M^{\mathcal{A}}(f_{-1})) = 2$ e $\dim V_{-1} = 3 - 2 = 1 < 3 = m_{-1}$. Questo vuol dire che per $h = -1$ l'endomorfismo f non è semplice e non possiamo determinare una base di autovettori per f.

Sia $h \neq -1$. In questo caso, sappiamo che gli autovalori sono -1 e h, con $m_{-1} = 2$ e $m_h = 1$, per cui possiamo dire che f è semplice se, allo stesso momento, si ha $\dim V_{-1} = m_{-1} = 2$ e $\dim V_h = m_h = 1$.

Sappiamo già che necessariamente abbiamo $\dim V_h = m_h = 1$, mentre possiamo solo dire che $1 \leq \dim V_{-1} \leq 2 = m_{-1}$. Sia, dunque, $T = -1$. Sappiamo che $V_{-1} = Ker f_{-1}$, dove $f_{-1} = f + i$ e:

$$M^{\mathcal{A}}(f_{-1}) = M^{\mathcal{A}}(f) + I = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ h & h & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{riducendo}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ h & h & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Questo vuol dire che per $h \neq 0, -1$ abbiamo $\rho(M^{\mathcal{A}}(f_{-1})) = 2$, per cui $\dim V_{-1} = 3 - 2 = 1 < 2 = m_{-1}$. Questo vuol dire che per $h \neq 0, -1$ l'endomorfismo non è semplice e non possiamo, perciò, determinare una base di autovettori. Invece, per $h = 0$ si ha $\dim V_{-1} = 2 = m_{-1}$, in quanto per $h = 0$ abbiamo $\rho(M^{\mathcal{A}}(f_{-1})) = 1$. Dunque, per $h = 0$ possiamo determinare una base di autovettori per f. Per quanto riguarda V_{-1}, essendo $h = 0$, abbiamo:

$$\begin{aligned} V_{-1} = \operatorname{Ker} f_{-1} &= \{v \in V \mid [v]_{\mathcal{A}} = (a, b, c),\ b - c = 0\} = \\ &= \{v \in V \mid [v]_{\mathcal{A}} = (a, b, b)\} = \mathcal{L}(v_1, v_2 + v_3) = \mathcal{L}((1, 2, 0, 0), (0, 0, 3, 2)). \end{aligned}$$

Calcoliamo, ora, l'autospazio V_h nel caso $h = 0$, cioè calcoliamo $V_0 = \operatorname{Ker} f$:

$$M^{\mathcal{A}}(f) = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{riducendo}} \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Quindi:

$$\begin{aligned} \operatorname{Ker} f &= \{v \in V \mid [v]_{\mathcal{A}} = (a, b, c),\ -a + b - c = 0,\ -b = 0\} = \\ &= \{v \in V \mid [v]_{\mathcal{A}} = (a, 0, -a)\} = \mathcal{L}(v_1 - v_3) = \mathcal{L}((1, 2, -2, -1)). \end{aligned}$$

Dunque, per $h = 0$ una base di autovettori per f è $[(1, 2, 0, 0), (0, 0, 3, 2), (1, 2, -2, -1)]$.

2. Dalle assegnazioni possiamo dire che:

$$\begin{aligned} &f(v_1 - v_3) = f(v_1) - f(v_3) = hv_2 \\ &f(v_2) = v_1 + (h-1)v_2 - v_3 = (v_1 - v_3) + (h-1)v_2. \end{aligned}$$

Dunque, possiamo dire che $f(v_1 - v_3), f(v_2) \in W$, per cui $f(W) = \mathcal{L}(f(v_1 - v_3), f(v_2)) \subseteq W$. Ciò dimostra che la restrizione $f|_W$ induce un endomorfismo $g\colon W \to W$. Inoltre, essendo ovvio che $\mathcal{B} = [v_1 - v_3, v_2]$ è una base di W (poiché linearmente indipendenti e generatori di W), ricaviamo subito dai calcoli precedenti che:

$$M^{\mathcal{B}}(g) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ h & h-1 \end{pmatrix}.$$

È, dunque, ovvio che per $h \neq 0$ si ha che g è un isomorfismo. Ciò vuol dire che g è iniettiva e suriettiva, per cui $\operatorname{Im} g = W$ e $\operatorname{Ker} g = \{(0, 0, 0, 0)\}$.

Sia $h = 0$. In tal caso:

$$M^{\mathcal{B}}(g) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

In tal caso, abbiamo $\dim \operatorname{Im} g = 1$ e $\operatorname{Im} g = \mathcal{L}(v_1 - v_2 - v_3) = \mathcal{L}((1, 2, -3, -2))$, mentre si ha $\dim \operatorname{Ker} g = 1$:

$$\operatorname{Ker} g = \mathcal{L}(v_1) = \mathcal{L}((1, 2, 0, 0)).$$

II

1. È assegnato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}, u$. Sono dati la retta:

$$r\colon \begin{cases} x - y + z - 1 = 0 \\ 2x - z + 2 = 0 \end{cases}$$

e il piano $\pi\colon x + y + z = 0$. Determinare la proiezione ortogonale di r su π e calcolare la distanza $d(r, \pi)$.

2. È assegnato nel piano un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $O, \vec{x}, \vec{y}, u$. Determinare e studiare il fascio di coniche tangenti alle rette $r_1\colon x - y = 0$ e $r_2\colon x + y + 1 = 0$, rispettivamente, nei punti $A = (1, 1)$ e $B = (-1, 0)$. Determinare il centro di simmetria della conica del fascio passante per $P_\infty = (3, 4, 0)$.

Soluzione

1. La retta s proiezione ortogonale della retta r sul piano π è intersezione dello stesso piano π con il piano π' contenente r e ortogonale a π. Il fascio di piani contenente r ha equazione:

$$\lambda(x - y + z - 1) + \mu(2x - z + 2) = 0 \Rightarrow (\lambda + 2\mu)x - \lambda y + (\lambda - \mu)z - \lambda + 2\mu = 0.$$

Noi vogliamo che i vettori di componenti $(\lambda + 2\mu, -\lambda, \lambda - \mu)$ e $(1, 1, 1)$ siano ortogonali tra loro, cioè che sia:

$$\lambda + 2\mu - \lambda + \lambda - \mu = 0 \Rightarrow \lambda + \mu = 0.$$

Prendendo $\lambda = -1$ e $\mu = 1$ otteniamo che:

$$\pi'\colon x + y - 2z + 3 = 0,$$

per cui:

$$s\colon \begin{cases} x + y - 2z + 3 = 0 \\ x + y + z = 0. \end{cases}$$

Per quanto riguarda la distanza $d(r, \pi)$, osserviamo che la retta r ha parametri direttori $(1, 3, 2)$ e che i vettori di componenti $(1, 3, 2)$ e $(1, 1, 1)$ non sono ortogonali tra loro. Ciò vuol dire che la retta r e il piano π non sono paralleli, per cui devono essere per forza incidenti. Questo ci fa subito concludere che $d(r, \pi) = 0$.

2. La retta AB ha equazione $x - 2y + 1 = 0$, per cui il fascio di coniche ha equazione;

$$h(x-y)(x+y+1) + (x-2y+1)^2 = 0 \Rightarrow (h+1)x^2 - 4xy + (-h+4)y^2 + (h+2)x + (-h-4)y + 1 = 0.$$

Le uniche coniche spezzate del fascio sono le due usate per scriverne l'equazione, per cui possiamo dire che per $h \neq 0$ abbiamo coniche irriducibili, mentre per $h = 0$ abbiamo una conica spezzata in due rette coincidenti. Inoltre, essendo:

$$|A| = \begin{vmatrix} h+1 & -2 \\ -2 & -h+4 \end{vmatrix} = -h^2 + 3h,$$

abbiamo che per $0 < h < 3$ abbiamo delle ellissi, tutte reali in quanto i punti base sono reali e tra le quali non figurano circonferenze; per $h = 3$ abbiamo una parabola, mentre per $h = 0$ la conica è spezzata; per $h < 0$ e $h > 3$ abbiamo delle iperboli, nessuna delle quali è equilatera.

Infine, cerchiamo la conica del fascio passante per il punto $P_\infty = (3, 4, 0)$. L'equazione del fascio di coniche in coordinate omogenee è:

$$(h+1)x^2 - 4xy + (-h+4)y^2 + (h+2)xt + (-h-4)yt + t^2 = 0,$$

per cui imponendo il passaggio per il punto P_∞ otteniamo:

$$-7h + 25 = 0 \Rightarrow h = \frac{25}{7}.$$

Dunque, la conica cercata è un'ellisse di equazione:

$$\frac{32}{7}x^2 - 4xy + \frac{3}{7}y^2 + \frac{39}{7}x - \frac{53}{7}y + 1 = 0 \Rightarrow 32x^2 - 28xy + 3y^2 + 39x - 53y + 7 = 0$$

la cui matrice associata B è:

$$B = \begin{pmatrix} 32 & -14 & \frac{39}{2} \\ -14 & 3 & -\frac{53}{2} \\ \frac{39}{2} & -\frac{53}{2} & 7 \end{pmatrix}.$$

Quindi, il centro di simmetria di questa conica si ottiene risolvendo il sistema:

$$\begin{cases} 32x - 14y + \dfrac{39}{2} = 0 \\ -14x + 3y - \dfrac{53}{2} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -\dfrac{25}{8} \\ y = -\dfrac{23}{4}. \end{cases}$$

Quindi, il centro di simmetria della conica è $C = (-\frac{25}{8}, -\frac{23}{4})$.