Corso di Laurea in
Ingegneria Informatica (Cp-I e J-Pr) e Ingegneria Elettronica (Cp-I e J-Pr)

Prova di **Algebra lineare e Geometria**- Appello 29 Giugno 2021

Durata della prova: 2 ore.
È vietato uscire dall'aula prima di aver consegnato definitivamente il compito.
È vietato consultare libri o appunti.

I

1. È assegnato, al variare di $h \in \mathbb{R}$, l'endomorfismo $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tale che:

$$\begin{aligned}&(1,1,0) \in \ker f\\&(1,0,1) \text{ è autovettore associato all'autovalore } h\\&f(1,1,1) = (2,1,h).\end{aligned}$$

Studiare la semplicità di f al variare di $h \in \mathbb{R}$, determinando, se possibile, una base di autovettori per f.

2. Dati $v_1 = (1,0,0,1)$, $v_2 = (0,1,0,0)$, $v_3 = (0,1,1,0)$, $w_1 = (1,1,0,0)$, $w_2 = (0,1,0,1)$, $w_3 = (0,0,0,1) \in \mathbb{R}^4$ e dati i sottospazi V e W di $\mathbb{R}^4$ aventi come basi, rispettivamente $\mathcal{A} = [v_1, v_2, v_3]$ e $\mathcal{B} = [w_1, w_2, w_3]$, si studi al variare di $h \in \mathbb{R}$ l'applicazione lineare $g\colon V \to W$ tale che:

$$M^{\mathcal{A},\mathcal{B}}(g) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ h & 1 & 2 \\ 1 & 1 & h \end{pmatrix},$$

determinando in ciascun caso $\operatorname{Im} f$ e $\operatorname{Ker} f$. Determinare il valore di $h \in \mathbb{R}$ per il quale $W \oplus \operatorname{Ker} g = \mathbb{R}^4$.

Soluzione

1. Osserviamo facilmente che $\mathcal{C} = [(1,0,0),(1,0,1),(1,1,1)]$ è una base di $\mathbb{R}^3$. Dalle condizioni date abbiamo:

$$\begin{cases} f(1,0,0) = (0,0,0) \\ f(1,0,1) = (h,0,h) \\ f(1,1,1) = (2,1,h), \end{cases}$$

per cui $[f(1,0,0)]_{\mathcal{C}} = (0,0,0)$ e $[f(1,0,1)]_{\mathcal{C}} = (0,h,0)$. Dobbiamo calcolare $[(2,1,h)]_{\mathcal{C}}$:

$$(2,1,h) = a(1,1,0) + b(1,0,1) + c(1,1,1) = (a+b+c, a+c, b+c) \Rightarrow \begin{cases} a+b+c = 2 \\ a+c = 1 \\ b+c = h \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = 2-h \\ b = 1 \\ c = h-1 \end{cases} \Rightarrow [f(2,1,h)]_{\mathcal{C}} = (2-h, 1, h-1).$$

Quindi:

$$M^{\mathcal{C}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2-h \\ 0 & h & 1 \\ 0 & 0 & h-1 \end{pmatrix} \Rightarrow P(T) = \begin{vmatrix} -T & 0 & 2-h \\ 0 & h-T & 1 \\ 0 & 0 & h-1-T \end{vmatrix} = -T(h-T)(h-1-T).$$

Gli autovalori sono, perciò, $0, h, h-1$, tutti distinti di molteplicità algebrica 1 per $h \neq 0, 1$. Ciò vuol dire che per $h \neq 0, 1$ f è certamente semplice e possiamo determinare una base di autovettori. Osserviamo che $m_0 = 1$, per cui necessariamente si ha $\dim V_0 = m_0 = 1$, che $V_0 = \operatorname{Ker} f$ e che $(1,1,0) \in \ker f$. Ciò vuol dire che $V_0 = \mathcal{L}((1,1,0))$. Analogamente, dal momento che $(1,0,1) \in V_h$ e che $\dim V_h = m_h = 1$, abbiamo $V_h = \mathcal{L}((1,0,1))$. Dobbiamo solo calcolare $V_{h-1} = \ker f_{h-1}$, essendo $f_{h-1} = f - (h-1)i$:

$$M^{\mathcal{C}}(f_{h-1}) = M^{\mathcal{C}}(f) - (h-1)I = \begin{pmatrix} 1-h & 0 & 2-h \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dunque:

$$\begin{aligned} V_{h-1} = \{v \in \mathbb{R}^3 \mid [v]_{\mathcal{C}} = (a,b,c),\ a(1-h) + c(2-h) = 0,\ b + c = 0\} = \\ = \{v \in \mathbb{R}^3 \mid [v]_{\mathcal{C}} = (\tfrac{h-2}{1-h}c, -c, c)\} = \mathcal{L}((h-2, h-1, 1-h)_{\mathcal{C}}) = \\ = \mathcal{L}((h-2)(1,1,0) + (h-1)(1,0,1) + (1-h)(1,1,1)) = \mathcal{L}((h-2,-1,0)). \end{aligned}$$

Quindi, per $h \neq 0, 1$ una base di autovettori è $[(1,1,0), (1,0,1), (h-2,-1,0)]$.

Sia $h = 0$. In tal caso, gli autovalori sono 0 e -1, con $m_0 = 2$ e $m_{-1} = 1$. Ragionando come fatto in precedenza osserviamo che $1 \leq \dim V_0 \leq 2 = m_0$ e che $(1,1,0), (1,0,1) \in V_0$. Essendo i due vettori linearmente indipendenti, necessariamente si ha $\dim V_0 = m_0 = 2$ (per cui f è semplice per $h = 0$) e $V_0 = \mathcal{L}((1,1,0), (1,0,1))$. Rimane da calcolare V_{h-1}, per il quale, procedendo come in precedenza, otteniamo $V_{-1} = \mathcal{L}((-2,-1,0))$. Quindi, per $h = 0$ una base di autovettori è $[(1,1,0), (1,0,1), (-2,-1,0)]$.

Sia $h = 1$. In tal caso gli autovalori sono 0 e 1, con $m_0 = 2$ e $m_1 = 1$. Sappiamo che $1 \leq \dim V_0 \leq m_0 = 2$ e che $1 \leq \dim V_1 \leq m_1 = 1$. Quindi, necessariamente si ha $\dim V_1 = m_1 = 1$ e f è semplice se $\dim V_0 = m_0 = 2$. Sappiamo che $V_0 = \ker f$, per cui:

$$M^{\mathcal{C}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Essendo $\rho(M^{\mathcal{C}}(f)) = 2$, abbiamo che $\dim V_0 = \operatorname{Ker} f = 3 - 2 = 1 < 2 = m_0$. Quindi, per $h = 1$ f non è semplice e non è possibile determinare una base di autovettori.

2. Cominciamo calcolando l'equazione cartesiana di W:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ x & y & z & t \end{vmatrix} = -z \Rightarrow W = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid z = 0\}.$$

Dal momento che $|M^{\mathcal{A},\mathcal{B}}(g)| = 1 - h^2$, per $h \neq \pm 1$ g è un isomorfismo, cioè g è iniettiva e suriettiva. Ciò vuol dire che $\operatorname{Ker} g = \{(0,0,0,0)\}$ e $\operatorname{Im} g = W$. Naturalmente,in questo caso si ha banalmente che $\operatorname{Ker} g \oplus W = W$ e, dunque, il valore di h per cui si ha $\operatorname{Ker} g \oplus W = \mathbb{R}^4$ sarà 1 oppure -1.

Sia $h = 1$:

$$M^{\mathcal{A},\mathcal{B}}(g) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{riducendo}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Quindi, $\dim \operatorname{Im} g = \rho(M^{\mathcal{A},\mathcal{B}}(g)) = 2$ e una sua base è data da:

$$[(1,1,1)_{\mathcal{B}}, (-1,2,1)_{\mathcal{B}}] = [w_1 + w_2 + w_3, -w_1 + 2w_2 + w_3] = [(1,2,0,2), (-1,1,0,3)].$$

Inoltre, $\dim \operatorname{Ker} g = \dim V - \dim \operatorname{Im} g = 3 - 2 = 1$ e:

$$\begin{aligned}\operatorname{Ker} g = \{v \in V \mid [v]_{\mathcal{A}} = (a,b,c),\ a+b-c=0,\ -3c=0\} = \\ = \{v \in V \mid [v]_{\mathcal{A}} = (a,-a,0)\} = \mathcal{L}((1,-1,0)_{\mathcal{A}}) = \\ = \mathcal{L}(v_1 - v_2) = \mathcal{L}((1,-1,0,1)).\end{aligned}$$

Osserviamo che $(1,-1,0,1) \in W$, in quanto verifica la sua equazione cartesiana. Dunque, $\operatorname{Ker} g \cap W = \operatorname{Ker} g$, per cui la somma $\operatorname{Ker} g + W$ non è diretta e si ha $\operatorname{Ker} g + W = W$.

Sia $h = -1$:

$$M^{\mathcal{A},\mathcal{B}}(g) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{riducendo}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Quindi, $\dim \operatorname{Im} g = \rho(M^{\mathcal{A},\mathcal{B}}(g)) = 2$ e una sua base è data da:

$$[(1,-1,1)_{\mathcal{B}}, (1,1,1)_{\mathcal{B}}] = [w_1 - w_2 + w_3, -w_1 + w_2 + w_3] = [(1,0,0,0), (1,2,0,2)].$$

Inoltre, $\dim \operatorname{Ker} g = \dim V - \dim \operatorname{Im} g = 3 - 2 = 1$ e:

$$\begin{aligned}\operatorname{Ker} g = \{v \in V \mid [v]_{\mathcal{A}} = (a,b,c),\ a+b-c=0,\ 2b+c=0\} = \\ = \{v \in V \mid [v]_{\mathcal{A}} = (-3b, b - 2b)\} = \mathcal{L}((-3,1,-2)_{\mathcal{A}}) = \\ = \mathcal{L}(-3v_1 + v_2 - 2v_3) = \mathcal{L}((-3,-1,-2,-3)).\end{aligned}$$

Osserviamo che $(-3,-1,-2,-3) \notin W$, in quanto non verifica la sua equazione cartesiana. Dunque, $\operatorname{Ker} g \cap W = \{(0,0,0,0)\}$, per cui la somma $\operatorname{Ker} g + W$ è diretta e si ha $\dim(\operatorname{Ker} g + W) = 4$, per cui necessariamente per $h = -1$ si ha $\operatorname{Ker} g \oplus W = \mathbb{R}^4$.

II

1. È assegnato nel piano un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $O, \vec{x}, \vec{y}, u$. Determinare e studiare il fascio di coniche passanti per i punti $P_1 = (-1,1)$, $P_2 = (1,1)$ e $P_3 = (-1,-1)$ e tangenti in quest'ultimo alla retta di equazione $y + 1 = 0$. Determinare una forma ridotta della conica passante per il punto $P_\infty = (-1,1,0)$.

2. È assegnato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}, u$. Determinare e studiare le quadriche contenenti la conica

$$\Gamma\colon \begin{cases} x^2 + y^2 - 1 = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

e i punti $A = (1,0,1)$, $B = (0,1,1)$ e $C = (-1,0,1)$. Detto Q il cono appartenente a questo fascio di quadriche, studiare la natura della conica sezione di Q con il piano $\pi\colon x - y - 1 = 0$.

Soluzione

1. Le coniche spezzate del fascio sono quelle di equazione $(y-1)(y+1) = 0$ e $(x+1)(x-y) = 0$. Dunque, esso ha equazione:

$$h(y-1)(y+1) + (x+1)(x-y) = 0 \Rightarrow x^2 - xy + hy^2 + x - y - h = 0.$$

Dato che le coniche spezzate del fascio sono solamente le due utilizzate per scriverne l'equazione, possiamo dire che per $h \neq 0$ le coniche sono certamente irriducibili. Inoltre:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & h \end{vmatrix} = h - \frac{1}{4},$$

per cui per $h > \frac{1}{4}$ abbiamo delle ellissi reali, in quanto i punti base sono reali, tra cui non figurano circonferenze; per $h = \frac{1}{4}$ abbiamo una parabola; per $h < \frac{1}{4}$, $h \neq 0$, abbiamo delle iperboli, tra cui figura una equilatera per $h = -1$.

Cerchiamo, ora, la conica del fascio passante per $P_\infty = (-1, 1, 0)$, scrivendo l'equazione del fascio di coniche in coordinate omogenee:

$$x^2 - xy + hy^2 + xt - yt - ht^2 = 0 \Rightarrow 1 + 1 + h = 0 \Rightarrow h = -2.$$

Quindi, la conica cercata si ottiene per $h = -2$ e per quanto detto in precedenza è un'iperbole ed ha equazione:

$$x^2 - xy - 2y^2 + x - y + 2 = 0.$$

Le matrici associate sono:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -2 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 2 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -2 \end{pmatrix},$$

per cui $|B| = -4$ e $|A| = -\dfrac{9}{4}$. Una forma ridotta della conica è del tipo $\alpha X^2 + \beta Y^2 = \gamma$, dove $-\alpha\beta\gamma = |B|$ e $|A| = \alpha\beta$. Dunque:

$$\gamma = -\frac{|B|}{\alpha\beta} = -\frac{16}{9}.$$

Inoltre, α e β sono gli autovalori di A:

$$P_A(T) = \begin{vmatrix} 1 - T & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -2 - T \end{vmatrix} = T^2 + T - \frac{9}{4} \Rightarrow T = \frac{-1 \pm \sqrt{10}}{2}.$$

Prendendo $\alpha = \frac{\sqrt{10}-1}{2}$ e $\beta = \frac{-\sqrt{10}-1}{2}$, otteniamo una forma ridotta dell'iperbole:

$$\frac{\sqrt{10} - 1}{2} X^2 + \frac{-\sqrt{10} - 1}{2} Y^2 = -\frac{16}{9}.$$

2. Le quadriche contenenti la conica data hanno equazione:

$$x^2 + y^2 - 1 + z(ax + by + cz + d) = 0.$$

Quando imponiamo il passaggio per i punti dati otteniamo:

$$\begin{cases} a + c + d = 0 \\ b + c + d = 0 \\ -a + c + d = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \\ d = -c. \end{cases}$$

Quindi, le quadriche cercate hanno equazione:

$$x^2 + y^2 - 1 + z(cz - c) = 0 \Rightarrow x^2 + y^2 + cz^2 - cz - 1 = 0.$$

Le matrici associate sono:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & -\frac{c}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{c}{2} & -1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}.$$

Dunque, abbiamo $|B| = -c - \frac{c^2}{4}$ e $|A| = c$. Questo vuol dire che per $c = -4$ abbiamo un cono reale, mentre per $c = 0$ abbiamo un cilindro in quanto in tal caso si ha $\rho(B) = 3$. Inoltre, osservando che la matrice A è diagonale, vediamo subito che i suoi autovalori sono concordi per $c > 0$. Quindi, si vede facilmente che per $c > 0$ abbiamo degli ellissoidi reali, mentre per $c < -4$ abbiamo degli iperboloidi iperbolici e per $-4 < c < 0$ abbiamo degli iperboloidi ellittici.

Il cono Q ha equazione:

$$x^2 + y^2 - 4z^2 + 4z - 1 = 0.$$

Dato che:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

il suo vertice è dato da:

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ -4z + 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow V = (0, 0, \tfrac{1}{2}).$$

Dato che $V \notin \pi$, certamente la conica $Q \cap \pi$ è irriducibile. Per stabilirne la natura dobbiamo vedere come sono fatti i suoi punti impropri:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 4z^2 + 4zt - t^2 = 0 \\ x - y - t = 0 \\ t = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t = 0 \\ y = x \\ 2x^2 - 4z^2 = 0. \end{cases}$$

Dato che i punti impropri sono reali e distinti, la conica è un'iperbole.