Corso di Laurea in
Ingegneria Informatica (Cp-I e J-Pr) e Ingegneria Elettronica (Cp-I e J-Pr)

Prova di **Algebra lineare e Geometria**- Appello 27 Ottobre 2021

Durata della prova: 2 ore.
È vietato uscire dall'aula prima di aver consegnato definitivamente il compito.
È vietato consultare libri o appunti.

I

Sono assegnate le applicazioni lineari $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ e $g\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ definite dalle assegnazioni:

$$f(1,0,1) = (1,1,h-1)$$
$$f(0,1,1) = (2,0,h+2)$$
$$f(1,-1,1) = (-1,1,h-3)$$

e da

$$g(x,y,z,t) = (x+y+hz, x+hy, (h-1)x+hz, (h+1)t), \quad \forall (x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4,$$

con $h \in \mathbb{R}$.

1. Studiare le semplicità di f, al variare di $h \in \mathbb{R}$, determinando, ove possibile, una base di autovettori per f.
2. Posto $V = \mathcal{L}((1,0,0,1))$, calcolare, al variare di $h \in \mathbb{R}$, $g^{-1}(1,0,0,1)$ e $g^{-1}(V)$, specificandone in quest'ultimo caso la dimensione per ogni valore di h.

Soluzione

1. Dall'assegnazione di f otteniamo:

$$\begin{cases} f(e_1)+f(e_3) = (1,1,h-1) \\ f(e_2)+f(e_3) = (2,0,h+2) \\ f(e_1)-f(e_2)+f(e_3) = (-1,1,h-3) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(e_1) = (1,1,-1) \\ f(e_2) = (2,0,2) \\ f(e_3) = (0,0,h). \end{cases}$$

Dunque:

$$M(f) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & h \end{pmatrix},$$

per cui:

$$P(T) = \begin{vmatrix} 1-T & 2 & 0 \\ 1 & -T & 0 \\ -1 & 2 & h-T \end{vmatrix} = (h-T)(T^2-T-2).$$

Dunque, gli autovalori sono $-1, 2, h$, i quali sono tutti distinti di molteplicità algebrica 1 per $h \neq -1, 2$.

Sia, dunque, $h \neq -1, 2$. In tal caso abbiamo, $m_{-1} = m_2 = m_h = 1$. Sia $T = h$. Sappiamo che $V_h = \operatorname{Ker} f_h$, essendo $f_h = f - i$ e:

$$M(f_h) = M(f) - hI = \begin{pmatrix} 1-h & 2 & 0 \\ 1 & -h & 0 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Questo porta facilmente alla conclusione che:

$$V_h = \mathcal{L}((0,0,1)).$$

Sia $T = -1$. Sappiamo che $V_{-1} = \text{Ker}\, f_{-1}$, essendo $f_{-1} = f + i$ e:

$$M(f_{-1}) = M(f) + I = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & h+1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{riducendo}} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & h+1 \end{pmatrix}$$

per cui:

$$V_{-1} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x + 2y = 0,\ -x + 2y + (h+1)z = 0\} = \mathcal{L}((h+1, -h-1, 3)).$$

Sia $T = 2$. Sappiamo che $V_2 = \text{Ker}\, f_2$, essendo $f_2 = f - 2i$ e:

$$M(f_2) = M(f) - 2I = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ -1 & 2 & h-2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{riducendo}} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & h-2 \end{pmatrix}$$

per cui:

$$V_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid -x + 2y = 0,\ -x + 2y + (h-2)z = 0\} = \mathcal{L}((2,1,0)).$$

Quindi, per $h \neq -1, 2$ una base di autovettori è $[(0,0,1), (h+1, -h-1, 3), (2,1,0)]$.

Sia $h = -1$. In questo caso gli autovalori sono $-1, 2$, con $m_{-1} = 2$ e $m_2 = 1$. Sappiamo che necessariamente $\dim V_2 = 1 = m_2$, mentre $1 \leq \dim V_{-1} \leq m_{-1} = 2$, per cui f è semplice se $\dim V_{-1} = m_{-1} = 2$. Sappiamo che $V_{-1} = \text{Ker}\, f_{-1}$, essendo $f_{-1} = f + i$ e:

$$M(f_{-1}) = M(f) + I = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{riducendo}} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

per cui $\dim V_{-1} = 3 - \rho(M(f_{-1})) = 3 - 2 = 1 < 2 = m_{-1}$. Quindi, per $h = -1$ f non è semplice, il che vuol dire che non è possibile, in questo caso, determinare un base di autovettori.

Sia $h = 2$. In questo caso gli autovalori sono $-1, 2$, con $m_{-1} = 1$ e $m_2 = 2$. Sappiamo che necessariamente $\dim V_{-1} = 1 = m_{-1}$, mentre $1 \leq \dim V_2 \leq m_2 = 2$, per cui f è semplice se $\dim V_2 = m_2 = 2$. Sappiamo che $V_2 = \text{Ker}\, f_2$, essendo $f_2 = f - 2i$ e:

$$M(f_2) = M(f) - 2I = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{riducendo}} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

per cui $\dim V_2 = 3 - \rho(M(f_2)) = 3 - 1 = 2 = m_2$. Quindi, per $h = 2$ f è semplice e possiamo, in questo caso, determinare un base di autovettori. Dalla matrice precedente abbiamno:

$$V_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^4 \mid -x + 2y = 0\} = \mathcal{L}((2,1,0), (0,0,1)).$$

Sia $T = -1$. Sappiamo che $V_{-1} = \text{Ker}\, f_{-1}$, essendo $f_{-1} = f + i$ e:

$$M(f_{-1}) = M(f) + I = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{riducendo}} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

per cui:

$$V_{-1} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x + 2y = 0,\ -x + 2y + 3z = 0\} = \mathcal{L}((1,-1,1)).$$

Quindi, per $h = 2$ una base di autovettori per f è $[(2,1,0), (0,0,1), (1,-1,1)]$.

2. Per calcolare $g^{-1}(1,0,0,1)$ occorre risolvere il sistema la cui matrice completa associata è:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & h & 0 & 1 \\ 1 & h & 0 & 0 & 0 \\ h-1 & 0 & h & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & h+1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{riducendo, per } h\neq 0} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & h & 0 & 1 \\ 1 & h & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -h^2+2h-1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & h+1 & 1 \end{array}\right).$$

Dalla riduzione fatta risulta evidente che per $h = 1, -1$ il sistema è impossibile, per cui in tal caso abbiamo $g^{-1}(1,0,0,1) = \emptyset$. Per $h \neq -1, 1, 0$ il sistema ammette una sola soluzione:

$$\begin{cases} x+y+hz = 1 \\ x+hy = 0 \\ (-h^2+2h-1)y = -1 \\ (h+1)t = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -\dfrac{h}{h^2-2h+1} \\ y = \dfrac{1}{h^2-2h+1} \\ z = \dfrac{1}{h-1} \\ t = \dfrac{1}{h+1}. \end{cases}$$

Quindi, in tal caso possiamo dire che:

$$g^{-1}(1,0,0,1) = \left\{ \left(-\frac{h}{h^2-2h+1}, \frac{1}{h^2-2h+1}, \frac{1}{h-1}, \frac{1}{h+1} \right) \right\}.$$

Infine, per $h = 0$ abbiamo:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{riducendo}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right).$$

Dunque, per $h = 0$ il sistema ammette ∞^1 soluzioni e:

$$g^{-1}(1,0,0,1) = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid x+y = 1,\ x = 0,\ t = 1\} = \{(0,1,z,1) \in \mathbb{R}^4\}.$$

Cerchiamo, ora, le equazioni cartesiane di V:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ x & y & z & t \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 - tR_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ x-t & y & z & 0 \end{pmatrix}.$$

Quindi:

$$V = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid x-t = 0,\ y = 0,\ z = 0\}.$$

Dunque:

$$\begin{aligned} g^{-1}(V) &= \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid g(x,y,z,t) \in V\} = \\ &= \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid (x+y+hz, x+hy, (h-1)x+hz, (h+1)t) \in V\} = \\ &= \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid x+y+hz-(h+1)t = 0,\ x+hy = 0,\ (h-1)x+hz = 0\}. \end{aligned}$$

Per calcolare $\dim g^{-1}(V)$ dobbiamo calcolare il rango della seguente matrice:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & h & -h-1 \\ 1 & h & 0 & 0 \\ h-1 & 0 & h & 0 \end{pmatrix}.$$

È evidente che per $h \neq 0, -1$ la matrice ha rango 3, per cui $\dim g^{-1}(V) = 4-3 = 1$. Invece, per $h = 0$ la matrice diventa:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{riducendo}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Quindi, per $h = 0$ abbiamo $\dim g^{-1}(V) = 4 - 2 = 2$. Per $h = -1$ abbiamo:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{riducendo}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ -4 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Quindi, per $h = -1$ abbiamo $\dim g^{-1}(V) = 4 - 3 = 1$.

II

1. È assegnato nel piano un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $O, \vec{x}, \vec{y}, u$. Studiare il fascio di coniche di equazione:
$$x^2 + 2hxy + (h+1)y^2 + 2x + 2y = 0$$
determinandone, in particolare, punti base e coniche spezzate.

2. È assegnato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}, u$. Studiare le quadriche di equazione:
$$hx^2 + 2xy - 2yz - 2z^2 - 2x + 2z + h = 0,$$
al variare di $h \in \mathbb{R}$.

Soluzione

1. Osserviamo subito che per $h = \infty$ otteniamo la conica di equazione $y(2x + y) = 0$, che è una conica spezzata. Inoltre, le matrici associate al fascio sono:
$$B = \begin{pmatrix} 1 & h & 1 \\ h & h+1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & h \\ h & h+1 \end{pmatrix}.$$
Quindi, $|B| = h - 2$ e $|A| = -h^2 + h + 1$. Otteniamo un'altra conica spezzata per $h = 2$, mentre per $h \neq 2$ abbiamo delle coniche irriducibili. La conica spezzata ottenuta per $h = 2$ ha equazione:
$$x^2 + 4xy + 3y^2 + 2x + 2y = 0 \Rightarrow (x + y)(x + 3y + 2) = 0.$$
Possiamo determinare i punti base:
$$\begin{cases} (x+y)(x+3y+2) = 0 \\ y(2x+y) = 0, \end{cases}$$
per cui essi sono i punti $(-2, 0)$, $(\frac{2}{5}, -\frac{4}{5})$ e $(0, 0)$, quest'ultimo contato due volte. Inoltre, essendo $|A| = -h^2 + h + 1$, possiamo dire che per $\frac{1-\sqrt{5}}{2} < h < \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ abbiamo delle ellissi, tutte reali, poiché i punti base sono reali; per $h = 0$ abbiamo una circonferenza; per $h = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$ abbiamo due parabole; per $h < \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ e $h > \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, $h \neq 2$, abbiamo delle iperboli, tra le quali figura una equilatera per $h = -2$.

2. Le matrici associate sono:
$$B = \begin{pmatrix} h & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & h \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad A = \begin{pmatrix} h & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}.$$
Essendo $|B| = 2h - h^2$ e $|A| = 2 - h$, vediamo subito che per $h = 0$ abbiamo un cono; per $h = 2$ abbiamo un cilindro o una quadrica spezzata, ma si verifica facilmente che per tale valore di h abbiamo $\rho(B) = 3$. Ciò implica che per $h = 2$ abbiamo un cilindro. Per $h \neq 0, 2$ abbiamo degli ellissoidi o degli iperboloidi. Dato che:
$$P_A(T) = \begin{vmatrix} h - T & 1 & 0 \\ 1 & -T & -1 \\ 0 & -1 & -2 - T \end{vmatrix} = -T^3 + (h-2)T^2 + (2h+2)T + 2 - h,$$
osserviamo facilmente che le quadriche non possono essere mai ellissoidi. Quindi, per $0 < h < 2$ abbiamo degli iperboloidi iperbolici, mentre per $h < 0$ e $h > 2$ abbiamo degli iperboloidi ellittici.