Corso di Laurea in
Ingegneria Informatica (J-Pr) e Ingegneria Elettronica (J-Pr)

Prova di **Algebra lineare e Geometria**- Appello 27 Gennaio 2021

Durata della prova: 90 minuti.
È vietato allontanarsi prima di aver consegnato definitivamente il compito.
È vietato consultare libri o appunti.

I

È dato l'endomorfismo $f\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ tale che:

$$M(f) = \begin{pmatrix} 0 & h-1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & h & -h & h+1 \\ 0 & 0 & 0 & 1-h \end{pmatrix}$$

al variare di $h \in \mathbb{R}$.

1. Studiare f al variare di $h \in \mathbb{R}$, determinando in ciascun caso $\operatorname{Im} f$ e $\operatorname{Ker} f$ e le loro equazioni cartesiane.
2. Studiare la semplicità di f al variare di $h \in \mathbb{R}$, determinando, ove possibile, una base di autovettori.

Soluzione

1. Dato che:

$$M(f) = \begin{pmatrix} 0 & h-1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & h & -h & h+1 \\ 0 & 0 & 0 & 1-h \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{riducendo, per } h\neq 0} \begin{pmatrix} 0 & h-1 & 1 & 0 \\ 0 & h & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

vediamo che per $h \neq 0$ si ha $\dim \operatorname{Im} f = \rho(M(f)) = 3$ e una sua base è data da

$$[(h-1,1,h,0),(1,-1,-h,0),(0,1,h+1,1-h)].$$

Cerchiamo la sua equazione cartesiana:

$$\begin{pmatrix} h-1 & 1 & h & 0 \\ 1 & -1 & -h & 0 \\ 0 & 1 & h+1 & 1-h \\ x & y & z & t \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{riducendo}} \begin{pmatrix} h-1 & 1 & h & 0 \\ h & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1-h \\ 0 & 0 & 0 & h(1-h)y+(h-1)z+t \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \operatorname{Im} f = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid h(1-h)y+(h-1)z+t = 0\}.$$

Inoltre, in tal caso deve essere $\dim \ker f = 1$ e si ha:

$$\ker f = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid (h-1)y+z=0,\ hy+t=0,\ t=0\} = L((1,0,0,0)).$$

Sia $h = 0$. In tal caso:

$$M(f) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{riducendo}} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

per cui $\dim \operatorname{Im} f = \rho(M(f)) = 2$ e una sua base è data da $[(-1,1,0,0),(0,1,1,1)]$. Cerchiamo le sue equazioni cartesiane:

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ x & y & z & t \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{riducendo}} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & x+y-t & z-t & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \operatorname{Im} f = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid x+y-t=0,\ z-t=0\}.$$

Inoltre, si ha $\dim \ker f = 2$ e:

$$\ker f = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid -y+z=0,\ t=0\} = \mathcal{L}((1,0,0,0),(0,1,1,0)).$$

2. Calcoliamo il polinomio caratteristico:

$$P(T) = \begin{vmatrix} -T & h-1 & 1 & 0 \\ 0 & 1-T & -1 & 1 \\ 0 & h & -h-T & h+1 \\ 0 & 0 & 0 & 1-h-T \end{vmatrix} = -T(1-h-T)[T^2+(h-1)T] = T^2(T+h-1)^2.$$

Dunque, per $h \neq 1$ gli autovalori sono $0, 1-h$, con $m_0 = 2$ e $m_{1-h} = 2$. Invece, per $h = 1$, l'unico autovalore è 0, con $m_0 = 4$.

Sappiamo che $V_0 = \ker f$ e abbiamo visto che $\dim \ker f = 1$ per $h \neq 0$ e $\dim \ker f = 2$ per $h = 0$. Questo vuol dire che certamente $\dim V_0 = \dim \ker f = 1 < m_0$ per $h \neq 0$ e ciò ci dice che per $h \neq 0$ l'endomorfismo sicuramente non è semplice e non potremo determinare per esso una base di autovettori.

Sia, dunque, $h = 0$. In questo caso, gli autovalori sono 0 e 1, con $m_0 = 2$ e $m_1 = 2$ e sappiamo già, per quanto appena detto, che $V_0 = \ker f$ e $\dim V_0 = \dim \ker f = 2 = m_0$. Per stabilire se f è semplice o meno è, quindi, sufficiente determinare il valore di $\dim V_1$.

Sia $T = 1$. Sappiamo che $V_1 = \ker f_1$, dove $f_1 = f - i$ e:

$$M(f_1) = M(f) - I = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{riducendo}} \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Quindi, $\rho(M(f_1)) = 2$ e $\dim V_1 = 4 - 2 = 2 = m_1$. Possiamo, perciò, concludere che per $h = 1$ l'endomorfismo è semplice ed è possibile determinare una base di autovettori. Dalla matrice precedente otteniamo subito:

$$V_1 = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid -x-y+z=0,\ -z+t=0\} = \mathcal{L}((-1,1,0,0),(1,0,1,1)).$$

Avendo già visto in precedenza che per $h = 0$ si ha $V_0 = \ker f = \mathcal{L}((1,0,0,0),(0,1,1,0))$, concludiamo che una base di autovettori è:

$$[(-1,1,0,0),(1,0,1,1),(1,0,0,0),(0,1,1,0)].$$

II

È assegnato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}, u$.

1. Sono dati la retta

$$r\colon \begin{cases} x-y=0 \\ z=1 \end{cases}$$

e il piano $\pi\colon x-1=0$. Determinare la retta r' simmetrica di r rispetto a π.

2. Classificare al variare di $h \in \mathbb{R}$ le quadriche di equazione:

$$x^2 + 2xy + hz^2 + 2z - 1 = 0.$$

Soluzione

1. Cominciamo osservando subito che la retta e il piano sono incidenti. Infatti, il seguente sistema ha una soluzione:

$$\pi \cap r\colon \begin{cases} x - y = 0 \\ z = 1 \\ x = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \\ z = 1. \end{cases}$$

Questo vuol dire che $r \cap \pi = H$, essendo $H = (1,1,1)$. Prendiamo un qualsiasi punto della retta r; per esempio, possiamo scegliere $P = (0,0,1)$. Determiniamo il punto P' simmetrico di P rispetto a π. La retta r' che cerchiamo sarà la retta passante per il punto H e per P'.

La retta s passante per P e ortogonale a π ha equazioni:

$$s\colon \begin{cases} x = t \\ y = 0 \\ z = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ z = 1. \end{cases}$$

Determiniamo il punto $M = s \cap \pi$:

$$s \cap \pi\colon \begin{cases} y = 0 \\ z = 1 \\ x = 1 \end{cases} \Rightarrow \quad M = (1,0,1).$$

Il punto $P' = (a,b,c)$ simmetrico di $P = (0,0,1)$ rispetto a π è il simmetrico di P rispetto al punto $M = (1,0,1)$. Questo vuol dire che deve essere:

$$\begin{cases} \dfrac{a}{2} = 1 \\ \dfrac{b}{2} = 0 \\ \dfrac{c+1}{2} = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 0 \\ c = 1 \end{cases} \Rightarrow \quad P' = (2,0,1).$$

A questo punto, la retta r' è la retta che passa per i punti $H = (1,1,1)$ e $P' = (2,0,1)$:

$$r'\colon \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 - t \\ z = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y - 2 = 0 \\ z = 1. \end{cases}$$

2. Le matrici associate alle quadriche sono:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & h & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & h \end{pmatrix}.$$

Si ha $|B| = h + 1$ e $|A| = -h$. Dunque, per $h = -1$ abbiamo un cono e per $h = 0$ abbiamo un paraboloide iperbolico. Per $h \neq 0, -1$ abbiamo ellissoidi o iperboloidi. Per capirlo calcoliamo:

$$P_A(T) = \begin{vmatrix} 1-T & 1 & 0 \\ 1 & -T & 0 \\ 0 & 0 & h-T \end{vmatrix} = (h-T)(T^2 - T - 1).$$

Quindi, A ammette autovalori di segno opposto, per cui le quadriche non sono mai ellissoidi, ma sono iperboloidi. In particolare, per $h > -1, h \neq 0$ abbiamo degli iperboloidi iperbolici e per $h < -1$ abbiamo degli iperboloidi ellittici.