Corso di Laurea in
Ingegneria Informatica (Cp-I e J-Pr) e Ingegneria Elettronica (Cp-I e J-Pr)

Prova di **Algebra lineare e Geometria**- Appello 24 Settembre 2021

Durata della prova: 2 ore.
È vietato uscire dall'aula prima di aver consegnato definitivamente il compito.
È vietato consultare libri o appunti.

I

Sono assegnate le applicazioni lineari $f\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ e $g\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ definite dalle assegnazioni:

$$f(x,y,z,t) = (x+y+z+t, hy+(h-2)z, (h+2)y+(h+2)z+ht), \quad \forall (x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4,$$

con $h \in \mathbb{R}$, e da:

$$M(g) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Detta $\varphi = f \circ g\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, diagonalizzare la matrice $M(\varphi)$ al variare di $h \in \mathbb{R}$.
2. Determinare una base $\mathcal{A}$ di $\mathbb{R}^3$ per la quale esiste un valore di $h \in \mathbb{R}$ tale che si abbia:

$$M^{\mathcal{E}_4,\mathcal{A}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & h & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Soluzione

1. È facile vedere che:

$$M(\varphi) = M(f)\cdot M(g) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & h & h-2 & 0 \\ 0 & h+2 & h+2 & h \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & h \\ -h & 0 & h+2 \end{pmatrix}.$$

Dunque:

$$P(T) = \begin{vmatrix} -T & 0 & 2 \\ 0 & 2-T & h \\ -h & 0 & h+2-T \end{vmatrix} = -T(2-T)(h+2-T).$$

Gli autovalori sono, dunque, 0, 2 e $h+2$. Essi sono tutti distinti di molteplicità algebrica 1 per $h \neq 0, -2$. Ciò vuol dire che per $h \neq 0, -2$ φ è semplice e $M(\varphi)$ è diagonalizzabile.
Sia $h \neq 0, -2$ e sia $T = 0$. Sappiamo che $V_0 = \operatorname{Ker}\varphi$:

$$M(\varphi) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & h \\ -h & 0 & h+2 \end{pmatrix},$$

per cui:

$$V_0 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2y+hz = 0, -hx+(h+2)z = 0\} = \\ = \left\{ \left(\frac{h+2}{h}z, -\frac{h}{2}z, z \right) \in \mathbb{R}^3 \right\} = \mathcal{L}((2h+4, -h^2, 2h)).$$

Sia $T = 2$. Sappiamo che $V_2 = \operatorname{Ker} \varphi_2$, dove $\varphi_2 = \varphi - 2i$ e:

$$M(\varphi_2) = M(\varphi) - 2I = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & h \\ -h & 0 & h \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{riducendo}} \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & h \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dunque:

$$V_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid -2x = 0,\ hz = 0\} = \{(0, y, 0) \in \mathbb{R}^3\} = \mathcal{L}((0, 1, 0)).$$

Sia $T = h + 2$. Sappiamo che $V_{h+2} = \operatorname{Ker} \varphi_{h+2}$, dove $\varphi_{h+2} = \varphi - (h + 2)i$ e:

$$M(\varphi_{h+2}) = M(\varphi) - (h+2)I = \begin{pmatrix} -h-2 & 0 & 0 \\ 0 & -h & h \\ -h & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{riducendo}} \begin{pmatrix} -h-2 & 0 & 0 \\ 0 & -h & h \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dunque:

$$V_{h+2} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (-h - 2)x = 0,\ -hy + hz = 0\} = \{(0, y, y) \in \mathbb{R}^3\} = \mathcal{L}((0, 1, 1)).$$

Quindi, per $h \neq 0, -2$ una base di autovettori è $[(2h + 4, -h^2, 2h), (0, 1, 0), (0, 1, 1)]$ e possiamo dire che $P^{-1}M(\varphi)P = D$, dove:

$$P = \begin{pmatrix} 2h+4 & 0 & 0 \\ -h^2 & 1 & 1 \\ 2h & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & h+2 \end{pmatrix}.$$

Sia $h = 0$. In tal caso, gli autovalori sono 0 e 2, con $m_0 = 1$ e $m_2 = 2$. In questo caso, osserviamo subito, inoltre, che la matrice $M(\varphi)$ è già diagonale, per cui non abbiamo nulla da dimostrare.

Sia $h = -2$. In tal caso,gli autovalori sono 0 e 2, con $m_0 = 2$ e $m_2 = 1$. Essendo necessariamente $\dim V_2 = 1 = m_2$, φ è semplice se $\dim V_0 = 2 = m_0$. Sappiamo che $V_0 = \operatorname{Ker} \varphi$:

$$M(\varphi) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

per cui $\dim V_0 = 3 - 2 = 1 < 2 = m_0$. Ciò vuol dire che per $h = -2$ φ non è semplice e $M(\varphi)$ non è diagonalizzabile.

2. Detta $\mathcal{A} = [v_1, v_2, v_3]$, affinché si abbia l'uguaglianza richiesta deve accadere che:

$$\begin{aligned} [f(e_1)]_{\mathcal{A}} &= (1, 0, 0) \\ [f(e_2)]_{\mathcal{A}} &= (0, h, 1) \\ [f(e_3)]_{\mathcal{A}} &= (1, -2, 0) \\ [f(e_4)]_{\mathcal{A}} &= (1, -1, 0), \end{aligned}$$

cioè:

$$\begin{cases} f(e_1) = v_1 \\ f(e_2) = hv_2 + v_3 \\ f(e_3) = v_1 - 2v_2 \\ f(e_4) = v_1 - v_2. \end{cases}$$

Dall'assegnazione di f vediamo che deve essere:

$$\begin{cases} v_1 = (1, 0, 0) \\ hv_2 + v_3 = (1, h, h+2) \\ v_1 - 2v_2 = (1, h-2, h+2) \\ v_1 - v_2 = (1, 0, h) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_1 = (1, 0, 0) \\ v_2 = v_1 - (1, 0, h) = (0, 0, -h) \\ (1, 0, 0) + (0, 0, 2h) = (1, h-2, h+2) \\ v_3 = (1, h, h+2) + (0, 0, h^2) = (1, h, h^2 + h + 2). \end{cases}$$

L'uguaglianza $(1,0,0)+(0,0,2h)=(1,h-2,h+2)$ implica che:

$$\begin{cases} 1=1 \\ 0=h-2 \\ 2h=h+2 \end{cases} \Rightarrow h=2.$$

Dunque, nel sistema precedente abbiamo:

$$\begin{cases} h=2 \\ v_1=(1,0,0) \\ v_2=(0,0,-2) \\ v_3=(1,2,8). \end{cases}$$

e questo vuol dire che la base cercata è $\mathcal{A}=[(1,0,0),(0,0,-2),(1,2,8)]$.

II

1. È assegnato nel piano un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $O,\vec{x},\vec{y},u$. Studiare il fascio di coniche di equazione:
$$x^2+2kxy+y^2+2x-2y-4k-3=0,$$
determinandone, in particolare, punti base e coniche spezzate.

2. È assegnato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $O,\vec{x},\vec{y},\vec{z},u$. Determinare e studiare le quadriche contenenti le coniche di equazioni:
$$\Gamma_1\colon \begin{cases} x^2-y^2-1=0 \\ z=0 \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} x^2+z^2-1=0 \\ y=0. \end{cases}$$

Soluzione

1. Osserviamo subito che per $k=\infty$ otteniamo la conica di equazione $xy-2=0$, che è un'iperbole equilatera. Inoltre, essendo:
$$B=\begin{pmatrix} 1 & k & 1 \\ k & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -4k-3 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad A=\begin{pmatrix} 1 & k \\ k & 1 \end{pmatrix},$$
vediamo che $|B|=(k+1)^2(4k-5)$ e che $|A|=1-k^2$. Dunque, abbiamo coniche spezzate per $k=-1$ e $k=\frac{5}{4}$, le cui equazioni sono, rispettivamente, $(x-y+1)^2=0$ e $(2x+y-4)(x+2y+4)=0$, mentre per $k\neq -1,\frac{5}{4}$ le coniche sono tutte irriducibili. I punti base del fascio sono dati da:
$$\begin{cases} (x-y+1)^2=0 \\ (2x+y-4)(x+2y+4)=0, \end{cases}$$
per cui sono $(1,2)$ e $(-2,-1)$ entrambi contati 2 volte. Infine, essendo $|A|=1-k^2$, possiamo dire che per $-1<k<1$ abbiamo delle ellissi reali, poiché i punti base sono reali, e, in particolare, per $k=0$ abbiamo una circonferenza; per $k=-1$ abbiamo una conica spezzata, mentre per $k=1$ abbiamo una parabola; per $k<-1$ e $k>1$, $k\neq\frac{5}{4}$, abbiamo delle iperboli. L'unica iperbole equilatera del fascio è la conica ottenuta per $k=\infty$.

2. Le quadriche contenenti la conica Γ_1 hanno equazione:
$$x^2-y^2-1+z(ax+by+cz+d)=0.$$
Intersechiamo con il piano $y=0$ per imporre che contenga la conica Γ_2:
$$\begin{cases} x^2-y^2-1+z(ax+by+cz+d)=0 \\ y=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2+axz+cz^2+dz-1=0 \\ y=0. \end{cases}$$

Affinché questa conica coincida con Γ_2 deve accadere che:

$$x^2 + axz + cz^2 + dz - 1 = k(x^2 + z^2 - 1),$$

per qualche $k \in \mathbb{R}$. Dunque:

$$\begin{cases} 1 = k \\ a = 0 \\ c = k \\ d = 0 \\ -1 = -k \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k = 1 \\ a = 0 \\ c = 1 \\ d = 0. \end{cases}$$

Quindi, le quadriche cercate hanno equazione:

$$x^2 + byz - y^2 + z^2 - 1 = 0.$$

Le matrici associate sono:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & \frac{b}{2} & 0 \\ 0 & \frac{b}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & \frac{b}{2} \\ 0 & \frac{b}{2} & 1 \end{pmatrix}.$$

Dal momento che $|B| = 1 + \frac{b^2}{4} > 0$ e $|A| = -1 - \frac{b^2}{4} \neq 0$ per ogni $b \in \mathbb{R}$ e che le quadriche sono chiaramente reali, esse sono tutte iperboloidi iperbolici.