Corso di Laurea in
Ingegneria Informatica (J-Pr) e Ingegneria Elettronica (J-Pr)

Prova di **Algebra lineare e Geometria**- Appello 24 Febbraio 2021

Durata della prova: 90 minuti.
È vietato allontanarsi prima di aver consegnato definitivamente il compito.
È vietato consultare libri o appunti.

I

1. Sono assegnati gli spazi vettoriali:
$$V = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x - y = 0\}$$
e
$$W = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid z - t = 0\},$$
unitamente alle basi $\mathcal{A} = [(1, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 0), (0, 0, 1, 1)]$ di V e $\mathcal{B} = [(1, 0, 0, 0), (1, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 1)]$ di W. Studiare, al variare di $h \in \mathbb{R}$, l'applicazione lineare $f : V \to W$ tale che:
$$M^{\mathcal{A},\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & h & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & h \end{pmatrix}.$$

2. È assegnato l'endomorfismo $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definito da:
$$g(x, y, z) = (x + y + z, hx + 2y + z, x + 2y + hz) \quad \forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3,$$
al variare di $h \in \mathbb{R}$. Determinare il valore di $h \in \mathbb{R}$ per il quale 1 e -1 sono autovalori per g, determinando, se possibile, una base di autovettori per g.

Soluzione

1. Osserviamo che $|M^{\mathcal{A},\mathcal{B}}(f)| = -h^2 + 4h - 3 = -(h - 1)(h - 3)$. Quindi, per $h \neq 1, 3$ f è un isomorfismo, cioè f è iniettiva e suriettiva, per cui in tal caso $\ker f = \{(0, 0, 0, 0)\}$ e $\operatorname{Im} f = W$.

   Sia $h = 1$. In tal caso:
$$M^{\mathcal{A},\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{riducendo}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$
   Quindi, $\dim \operatorname{Im} f = \rho(M^{\mathcal{A},\mathcal{B}}(f)) = 2$ e una base di $\operatorname{Im} f$ è determinata dalle prime due colonne di $M^{\mathcal{A},\mathcal{B}}(f)$, ricordando che le colonne sono componenti rispetto alla base $\mathcal{B}$ di W. Dunque, una tale base di $\operatorname{Im} f$ è:
$$[(1, 0, 0, 0) + (1, 1, 0, 0) + (0, 0, 1, 1), (1, 0, 0, 0) + 2(1, 1, 0, 0) + (0, 0, 1, 1)] = [(2, 1, 1, 1), (3, 2, 1, 1)].$$
   Inoltre, si ha $\dim \ker f = 3 - \rho(M^{\mathcal{A},\mathcal{B}}(f)) = 3 - 2 = 1$ e:
$$\begin{aligned} \ker f &= \{v \in V \mid [v]_{\mathcal{A}} = (a, b, c),\ a + b + c = 0,\ b + c = 0\} = \\ &= \{v \in V \mid [v]_{\mathcal{A}} = (0, b, -b)\} = \mathcal{L}((0, 0, 1, 0) - (0, 0, 1, 1)) = \mathcal{L}((0, 0, 0, -1)) = \mathcal{L}((0, 0, 0, 1)). \end{aligned}$$

Sia $h = 3$. In tal caso:

$$M^{\mathcal{A},\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{riducendo}} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Quindi, $\dim \operatorname{Im} f = \rho(M^{\mathcal{A},\mathcal{B}}(f)) = 2$ e una base di $\operatorname{Im} f$ è determinata dalle prime due colonne di $M^{\mathcal{A},\mathcal{B}}(f)$, ricordando che le colonne sono componenti rispetto alla base $\mathcal{B}$ di W. Dunque, una tale base di $\operatorname{Im} f$ è:

$$[(1,0,0,0) + (1,1,0,0) + (0,0,1,1), 3(1,0,0,0) + 2(1,1,0,0) + (0,0,1,1)] = [(2,1,1,1),(5,2,1,1)].$$

Inoltre, si ha $\dim \ker f = 3 - \rho(M^{\mathcal{A},\mathcal{B}}(f)) = 3 - 2 = 1$ e:

$$\begin{aligned} \ker f &= \{v \in V \mid [v]_{\mathcal{A}} = (a,b,c),\ a + 3b + c = 0,\ -b + c = 0\} = \\ &= \{v \in V \mid [v]_{\mathcal{A}} = (-4b,b,b)\} = \mathcal{L}(-4(1,1,0,0) + (0,0,1,0) + (0,0,1,1)) = \mathcal{L}((-4,-4,2,1)). \end{aligned}$$

2. Chiaramente si ha:

$$M(g) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ h & 2 & 1 \\ 1 & 2 & h \end{pmatrix}.$$

Sappiamo che $P(T) = |M(g) - tI|$ è il polinomio caratteristico di g e che 1 e -1 sono autovalori se e solo se sono radici del polinomio caratteristico. Quindi, vogliamo che allo stesso momento si abbia $|M(g) - I| = 0$ e $|M(g) + I| = 0$:

$$|M(g) - I| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ h & 1 & 1 \\ 1 & 2 & h-1 \end{vmatrix} = -h^2 + 3h = 0 \quad \text{e} \quad |M(g) + I| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ h & 3 & 1 \\ 1 & 2 & h+1 \end{vmatrix} = -h^2 + 7h = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -h^2 + 3h = 0 \\ -h^2 + 7h = 0 \end{cases} \Rightarrow h = 0.$$

Quindi, il valore cercato è $h = 0$. In tal caso si ha:

$$P(T) = \begin{vmatrix} 1-T & 1 & 1 \\ 0 & 2-T & 1 \\ 1 & 2 & -T \end{vmatrix} = -T(1-T)(2-T) + 1 - 2 + T - 2 + 2T =$$

$$= -T(1-T)(2-T) - 3 + 3T = (1-T)[-T(2-T) - 3] =$$

$$= (1-T)(T^2 - 2T - 3) = (1-T)(T+1)(T-3).$$

Quindi, gli autovalori sono 1, -1 e 3, tutti di molteplicità algebrica 1, per cui, effettivamente, esiste una base di autovettori per g.

Sia $T = 3$. Sappiamo che $V_3 = \ker g_3$, dove $g_3 = g - 3i$ e:

$$M(g_3) = M(g) - 3I = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{riducendo}} \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dunque:

$$V_{-3} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid -2x + y + z = 0,\ -y + z = 0\} = \{(y,y,y) \in \mathbb{R}^3\} = \mathcal{L}((1,1,1)).$$

Sia $T = -1$. Sappiamo che $V_{-1} = \ker g_{-1}$, dove $g_{-1} = g + i$ e:

$$M(g_{-1}) = M(g) + I = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{riducendo}} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dunque:

$$V_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x+y+z=0,\, 3y+z=0\} = \{(y,y,-3y) \in \mathbb{R}^3\} = \mathcal{L}((1,1,-3)).$$

Sia $T = 1$. Sappiamo che $V_1 = \ker g_1$, dove $g_1 = g - i$ e:

$$M(g_1) = M(g) - I = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{riducendo}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dunque:

$$V_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid y+z=0,\, x+3y=0\} = \{(-3y,y,-y) \in \mathbb{R}^3\} = \mathcal{L}((-3,1,-1)).$$

Quindi, una base di autovettori per g è $[(1,1,1),(1,1,-3),(-3,1,-1)]$.

II

1. È assegnato nel piano un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $O, \vec{x}, \vec{y}, u$. Sono dati i punti $A = (1,0)$, $B = (-1,1)$ e $C = (0,1)$. Determinare e studiare il fascio di coniche del piano passanti per i punti A e B e tangenti in C all'asse $\vec{y}$. Determinare la conica del fascio passante per il punto improprio $P = (1,1,0)$.

2. È assegnato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}, u$. Sono dati la conica
$$\Gamma\colon \begin{cases} x^2 - y = 0 \\ z = 1 \end{cases}$$
ed i punti $P_1 = (1,0,0)$ e $P_2 = (0,1,0)$. Determinare e studiare le quadriche contenenti la conica Γ e passanti per P_1 e P_2 e per l'origine O.

Soluzione

1. Le uniche coniche spezzate del fascio sono $AB \cup \vec{y}\colon (x+2y-1)x = 0$ e $AC \cup BC\colon (x+y-1)(y-1) = 0$. Dunque, il fascio di coniche ha equazione:
$$h(x+2y-1)x + (x+y-1)(y-1) = 0 \Rightarrow hx^2 + (2h+1)xy + y^2 - (h+1)x - 2y + 1 = 0.$$
Dal momento che le uniche coniche spezzate del fascio sono le due utilizzate per scriverne l'equazione, possiamo dire che per $h \neq 0$ le coniche sono certamente irriducibili. Inoltre, essendo:
$$|A| = \begin{vmatrix} h & \dfrac{2h+1}{2} \\ \dfrac{2h+1}{2} & 1 \end{vmatrix} = -\frac{4h^2+1}{4} < 0 \quad \forall h \in \mathbb{R},$$
concludiamo che le coniche irriducibili del fascio sono tutte iperboli. In particolare, per $h = -1$ abbiamo un'iperbole equilatera.

   Cerchiamo, infine, la conica del fascio passante per il punto $P = (1,1,0)$. Occorre scrivere la conica in coordinate omogenee:
$$hx^2 + (2h+1)xy + y^2 - (h+1)xt - 2yt + t^2 = 0$$
e poi imporre il passaggio per P:
$$h + 2h + 1 + 1 = 0 \Rightarrow h = -\frac{2}{3}.$$
Quindi, la conica cercata ha equazione:
$$-\frac{2}{3}x^2 - \frac{1}{3}xy + y^2 - \frac{1}{3}x - 2y + 1 = 0.$$

2. Le quadriche contenenti la conica Γ hanno equazione:

$$x^2 - y + (z-1)(ax+by+cz+d) = 0.$$

Imponendo il passaggio per i tre punti otteniamo:

$$\begin{cases} -a-d+1=0 \\ -b-d-1=0 \\ -d=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=-1 \\ d=0, \end{cases}$$

per cui le quadriche cercate hanno equazionne:

$$x^2 + xz - yz + cz^2 - x - cz = 0.$$

Le matrici associate sono:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & c & -\frac{c}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{c}{2} & 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & c \end{pmatrix}.$$

Essendo $|B| = \frac{1}{16} > 0$ e $|A| = -\frac{1}{4} \neq 0$, le quadriche sono tutte iperboloidi iperbolici. Infatti, contenendo certamente punti reali, esse non possono essere ellissoidi immaginari.